

2018 年度 修士論文

多目的最適化に着想を得た  
優良解集合探索問題のための  
優越関係の提案  
—進化型単目的最適化手法への適用—

首都大学東京大学院 理工学研究科 電気電子工学専攻

福島 竜

# 論文要旨

近年、最適化の対象となるシステムは大規模化・複雑化の傾向にあるとともに、システムの設計・運用・制御や工業製品の性能等に対する要求の高度化が進み、最適化に対するより一層の実用性への要求が高まっており、新たな最適化問題および最適化手法の構築が課題となっている。

伝統的に、最適化問題は単目的最適化問題として定式化がなされ、唯一の大域的最適解あるいは準最適解を獲得することが求められてきた。一方近年では、先に述べたような実応用の観点から、単なる最適解の獲得を超えた、意思決定の支援となるような情報を提供するための最適化が求められている。周辺技術を活用した最適化は、多くの解の評価や人間の経験に依存しない解の探索が可能であり、意思決定の支援となることが期待される。このような場合、しばしば複数の目的を同時に考慮した最適化を行う。このような最適化は多目的最適化と呼ばれる。一方で、最適化の実応用では、最適設計における設計者の主観的な評価、例えばデザインの評価など、定式化や客観的な評価が困難な目的の考慮が要求される場合がある。しかし、従来の多目的最適化では、客観的な評価が可能な目的を主として扱っており、定式化や客観的な評価が困難な目的の考慮を前提としておらず、そのような目的を扱うことは難しい。以上のように、最適化の実応用に対する要求の高度化により、従来の最適化では十分な対応が困難な要求が発生している。

これらの要求を満足するため、使用者の希求水準を満たす多様な解集合の獲得が有効な手段であると考えられる。上記の解集合は、従来の単目的最適化では考慮することが困難であった代替案の提示を可能とする。また使用者の希求水準を満たす多様な解集合を獲得することは、多目的最適化では考慮されていない、定式化や客観的な評価が困難な目的を考慮することを可能とする。著者らは上記の解集合を、評価値が一定以上優れ、かつ解相互の距離

が一定以上離れた局所的最適解の集合である優良解集合として定式化し、優良解集合を獲得することを目的とした最適化問題として、優良解集合探索問題を提案してきた。

著者らは先行研究として、この優良解集合を獲得するにあたり、優良解集合を包含するすべての局所解を獲得することで、間接的に目的達成を図るアプローチをとってきた。しかしこのアプローチは、優良解集合の定義をそのアルゴリズム内に明示的に含んではおらず、使用者の希求水準を反映しているわけではないため、厳密には優良解集合探索手法とは言えない。そこで本論文では、多目的最適化に着想を得た、優良解集合のための優越関係を提案する。この優越関係を、一般に知られる進化型単目的最適化手法に適用し、数値実験を通して、従来の単目的最適化手法に大きな変更を加えることなく、優良解集合探索手法として再定義できることを示した。上記の優越関係およびそれを適用した最適化手法は、優良解集合の定義を明示的に含むという先行研究にはない新規性と有用性を有している。本論文の要点は以下の通りである。

#### ① 優良解集合探索問題における解相互の優越関係の定義

先行研究の優良解集合探索問題のための最適化手法は、優良解集合を包含する、すべての局所的最適解を獲得することで、間接的に優良解集合探索問題を解くというアプローチをとってきた。本論文では、この優良解集合探索問題と関係の深い多目的最適化の研究分野の、進化型多目的最適化手法の戦略である、優越関係を用いた解更新に着想を得て、優良解集合探索問題における優越関係を定義した。この優越関係には、優良解集合の定義を明示的に含んでおり、この優越関係を用いた解更新を行う手法は、優良解集合探索問題を、使用者の希求水準を満足する形で解くことが可能となる。

#### ② 優良解集合探索問題のための優越関係の進化型単目的最適化への適用

上記の優越関係を、従来の単目的最適化手法の解更新に適用し、実際に数値実験で優良解集合探索問題を解くことで、大きな変更を加えることなく、実用的な優良解集合探索手法を構築できることを示す。適用先の手法として本論文では、優越関係による解更新との親和性の観点から、単目的最適化手法を選択した。さらに、従来の単目的最適化手法および優越関係を適用した提案手法を用いて、優良解集合探索問題を解く数値実験を行い、その有用性を示した。

# 目次

論文要旨	i
<b>1 序論</b>	<b>1</b>
1.1 本研究の背景	1
1.2 本研究の目的	2
1.3 本論文の構成	3
<b>2 最適化問題</b>	<b>4</b>
2.1 単目的最適化問題	4
2.2 多目的最適化問題	7
2.2.1 多目的最適化問題の諸定義	7
2.2.2 進化型多目的最適化手法	8
2.3 優良解集合探索問題	11
2.3.1 最適化の実応用における要求	11
2.3.2 優良解集合探索問題の概要	12
2.3.3 優良解集合探索問題の提案	13
2.4 優良解集合の探索に適したアルゴリズムの性質	14
<b>3 代表的なメタヒューリスティクス</b>	<b>18</b>
3.1 Particle Swarm Optimization	18
3.2 Firefly Algorithm	21
3.3 Differential Evolution	24
3.4 Genetic Algorithm	26

<b>4</b>	<b>優良解集合探索問題のための優越関係の提案</b>	<b>29</b>
4.1	優良解集合探索問題の再定義	29
4.2	優良解集合探索問題の考察	31
4.3	優良解集合探索問題における優越関係「優良解適合度 $fit(\mathbf{x}, \delta, \varepsilon; \mathbf{P})$ 」の提案	32
4.3.1	優越関係に基づく進化型多目的最適化手法	32
4.3.2	優良解適合度の定義	33
4.4	進化型単目的最適化手法への適用	34
4.4.1	Differential Evolution への適用	34
4.4.2	Genetic Algorithm への適用	34
<b>5</b>	<b>数値実験</b>	<b>37</b>
5.1	対象問題の定義	37
5.1.1	Function 1	37
5.1.2	Shekel Function	40
5.2	実験条件	42
5.2.1	共通部分	42
5.2.2	DE への適用について	43
5.2.3	GA への適用について	43
5.3	実験結果	44
5.3.1	DE への適用結果	44
5.3.2	GA への適用結果	62
5.3.3	考察	80
<b>6</b>	<b>結論</b>	<b>81</b>
6.1	本論文の成果	81
6.1.1	初めての優良解集合探索問題における優越関係の定義	81
6.1.2	初めての厳密な優良解集合探索手法の提案	82
6.1.3	提案した優越関係および優良解集合探索手法の有用性の数値実験 的検証	82
6.2	課題と展望	82

---

<b>7 謝辞</b>	<b>83</b>
参考文献	84

# 1

## 序論

### 1.1 本研究の背景

近年、最適化の対象となるシステムは大規模化・複雑化の傾向にあるとともに、システムの設計・運用・制御や工業製品の性能等に対する要求の高度化が進み[1]、最適化に対するより一層の実用性への要求が高まっており、新たな最適化問題および最適化手法の構築が課題となっている。

伝統的に、最適化問題は単目的最適化問題として定式化がなされ、唯一の大域的最適解あるいは準最適解を獲得することが求められてきた。一方近年では、先に述べたような実応用の観点から、単なる最適解の獲得を超えた、意思決定の支援となるような情報を提供するための最適化が求められている。周辺技術を活用した最適化は、多くの解の評価や人間の経験に依存しない解の探索が可能であり、意思決定の支援となることが期待される。このような場合、しばしば複数の目的を同時に考慮した最適化を行う。このような最適化は多目的最適化[2]と呼ばれる。一方で、最適化の実応用では、最適設計における設計者の主観的な評価、例えばデザインの評価[3]など、定式化や客観的な評価が困難な目的の考慮が要求される場合がある。しかし、従来の多目的最適化では、客観的な評価が可能な目的を主として扱っており、定式化や客観的な評価が困難な目的の考慮を前提としておらず、そのような目的を扱うことは難しい。以上のように、最適化の実応用に対する要求の高度化により、従来の最適化では十分な対応が困難な要求が発生している。

これらの要求を満足するため、使用者の希求水準を満たす多様な解集合の獲得が有効な手

段であると考え。上記の解集合は、従来の単目的最適化では考慮することが困難であった代替案の提示を可能とする。また使用者の希求水準を満たす多様な解集合を獲得することは、多目的最適化では考慮されていない、定式化や客観的評価が困難な目的を考慮することを可能とする。著者らは上記の解集合を、評価値が一定以上優れ、かつ解相互の距離が一定以上離れた局所的最適解の集合である優良解集合として定式化し、優良解集合を獲得することを目的とした最適化問題として、優良解集合探索問題を提案してきた[4, 5, 6, 7]。

#### ① 優良解集合探索問題における解相互の優越関係の定義

先行研究の優良解集合探索問題のための最適化手法は、優良解集合を包含する、すべての局所的最適解を獲得することで、間接的に優良解集合探索問題を解くというアプローチをとってきた。本論文では、この優良解集合探索問題と関係の深い多目的最適化の研究分野の、進化型多目的最適化手法の戦略である、優越関係を用いた解更新に着想を得て、優良解集合探索問題における優越関係を定義した。この優越関係には、優良解集合の定義を明示的に含んでおり、この優越関係を用いた解更新を行う手法は、優良解集合探索問題を、使用者の希求水準を満足する形で解くことが可能となる。

#### ② 優良解集合探索問題のための優越関係の進化型単目的最適化への適用

上記の優越関係を、従来の単目的最適化手法の解更新に適用し、実際に数値実験で優良解集合探索問題を解くことで、大きな変更を加えることなく、実用的な優良解集合探索手法を構築できることを示す。適用先の手法として本論文では、優越関係による解更新との親和性の観点から、単目的最適化手法を選択した。さらに、従来の単目的最適化手法および優越関係を適用した提案手法を用いて、優良解集合探索問題を解く数値実験を行い、その有用性を示した。

## 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、優良解集合探索問題のための優越関係を定義することで、①初めての厳密な優良解集合探索問題の提案と、②優良解集合探索問題の主に手法開発における研究基盤の構築にある。著者らは先行研究として、この優良解集合を獲得するにあたり、優良解集合を包含するすべての局所解を獲得することで、間接的に目的達成を図るアプローチ



をとってきた。しかしこのアプローチは、優良解集合の定義をそのアルゴリズム内に明示的に含んではおらず、使用者の希求水準を反映しているわけではないため、厳密には優良解集合探索手法とは言えない。そこで本論文では、多目的最適化に着想を得た、優良解集合のための優越関係を提案する。この優越関係を、一般に知られる進化型単目的最適化手法に適用し、数値実験を通して、従来の単目的最適化手法に大きな変更を加えることなく、優良解集合探索手法として再定義できることを示す。上記の優越関係およびそれを適用した最適化手法は、優良解集合の定義を明示的に含むという先行研究にはない新規性と有用性を有している。以上により、既述の目的達成をはかる。

### 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。

2章では、本論文の問題側における研究背景として、3つの最適化問題の枠組みについて説明する。1つめは従来の最適化の枠組みのひとつとして単目的最適化問題、2つめは本論文の提案の着想を得た多目的最適化問題、そして3つめは本論文が対象としている最適化問題である、優良解集合探索問題を説明する。

3章では、本論文の手法側における研究背景として、4つの代表的なメタヒューリスティクスについて説明する。1つめは、Particle Swarm Optimization, 2つめは、Firefly Algorithm, 3つめは、Differential Evolution, 4つめは、Genetic Algorithm を説明する。

4章では、本論文の提案部分となる、優良解集合探索問題における優越関係の提案を行う。優良解集合探索問題および、優越関係の定義から始まり、優越関係の適用にあたっての優良解集合探索問題の考察をへて、従来の単目的最適化手法への適用へと至る。

5章では、数値実験について記述する。優越関係の適用前後による、優良解集合探索性能を比較することで、優良解集合を直に探索できることを、理論的だけでなく、実験的にも示す。そして、本提案の有用性を示す。

6章では、本論文で得られた成果と、今後の課題および展望について述べる。

# 2

## 最適化問題

### 2.1 単目的最適化問題

最適化とは、「ある制約条件の下で、多数の選択肢の中から、目的に対して最適な成果を出す選択肢（解）を選ぶ行為」を指す。最適化は工学，経済学，社会学などの幅広い分野に及んで応用され，その重要性が広く認識されている。特に工学では，計画問題や製品設計問題など，「問題毎に設定された目的に対する成果（目的関数）を最大化あるいは最小化する問題」を，最適化問題として数理的に記述することが可能である。具体的な例として，工業製品の寸法・形状・トポロジー最適設計問題[8][9]，生産分野の工場の生産計画最適化問題[10][11][12]，エネルギー分野の設備最適運用問題[13][14][15]，機械学習分野のニューラルネットワークの学習問題[16]，金融工学分野のポートフォリオ最適化問題[17][18]などが挙げられる。これらの最適化問題は，システムの出力（目的関数）が目的に対して最適な値となるように，入力（解）を決定する問題として置き換えられる。システムとは，「相互に作用し合う，複数の要素から構成される集合体」を指す。歴史的には，Dantzigにより単体法[19]が開発されてから，最適化手法の開発・改良や，適用範囲の拡張が進められてきた。現代では，一般のシステムを対象とする最適化（システム最適化）は，現代工学の基盤技術の一つとして確立している。

この目的関数が，単数である最適化問題のことを，単目的最適化問題という。

工学における最適化の形態は，下記の要素から構成されている。

- (1) 対象となる実システム

- (2) 実システムを表現した数式モデル
- (3) 数式モデルに適用可能な最適化手法

本来、上記の最適化の形態において、(2)では、有効な最適化手法が適用できるように、数式モデルの定式化を行い、(3)では、対象の問題に有効な最適化手法を選択することが常道である。したがって、(2)と(3)は密接な関係にある。

最適化の理論は、凸解析[20]と呼ばれる数学の分野から発展した後、解の最適性や最適化問題の双対性など、最適化に関する重要な諸概念が整備され、現在でも、最適化問題に対する解析や最適化手法の設計において、重要な役割を果たしている。このように、最適化問題に対して、上記の理論に基づき最適な解を導くための方法論を数理計画といい、この方法論の下で構築・設計された最適化手法を数理計画法[21][22][23][24][25][26][27][28]という。数理計画法は、最適化の理論に従い、数式モデルの解析的情報（勾配や Hesse 行列など）を用いて、数学的に保証された解を求める。代表的な数理計画法として、線形計画問題を対象とする単体法や、非線形計画問題を対象とする Newton-Raphson 法が歴史的によく知られている。これまで数理計画法に対して、解の収束性・最適性など、多くの数理的な知見や性質が明らかにされていることから、上記の最適化の形態の(3)において、従来から数理計画法が使用されてきた。

しかし、数理計画法は、最適化問題の解析的な情報を必要とするため、手法の種類によって、適用可能な最適化問題のクラスが規定される。これは、上記の最適化の形態の(3)において数理計画法を採用した場合、(2)と(3)の依存関係が互いに強いため、(2)と(3)の適用可能なクラスが限定されることを示している。このため、数理計画法を用いた最適化では、以下の問題が生じる。

- 手法の規定により、実システムが数式モデルへ表現可能であることや、数式モデルの微分可能性・連続性を有していること、などの様々な条件が必要となるため、最適化の適用範囲が限定される。
- 数式モデルを手法に合致するように表現した結果、実システムと数式モデルの間に乖離が生じるため、解の有用性や実行可能性が不十分となる。

このように、数理計画に基づく最適化では、手法が最適化の形態に制約条件を課すことから、その実用化には課題が多い。

一方、近年のシステムや工業製品の大規模化・複雑化により、システムの設計・運用・制御では高効率化・高信頼化・高機能化の実現が困難となっている。また、現実の最適化では、長時間をかけて厳密な最適解のみを求めることよりも、実用的な時間内に十分な最適性を有する解（準最適解）を求めることに対するニーズが多い。さらに近年では、コンピュータパワーの飛躍的な増大が、最適化アルゴリズムやシミュレーションなどの数値計算に多大な貢献をしている。このように、最適化分野を取り巻く環境の変化（① 実システムの大規模化・複雑化，② 計算時間の制約，③ 周辺技術の発展）に応じた、実用的かつ新たな最適化手法の必要性が高まっている。

上述の「実用上における従来の最適化手法の課題」や「最適化分野の環境の変化」に対応可能な最適化手法の枠組みとして、近年ではメタヒューリスティクス（発見的近似解法）が注目されている[29][30][31][32][33][34]。メタヒューリスティクスは、① 解直接探索法，② 実用的な近似手法，③ 発見的手法，という特徴を有している。解直接探索法とは、最適化問題の解情報と目的関数値情報のみを用いて最適化を行う手法である。最適化の形態の(3)において解直接探索法であるメタヒューリスティクスを採用した場合、数理計画法とは異なり、手法が数式モデルに対して制約条件を課さない。そのため、高精度なモデリングや、シミュレータ・計測機器からの直接的な目的関数値の獲得など、最適化の形態が柔軟となる。また、実用的な計算時間に応じて最適性の高い近似解を求めることができる。さらに、多くの手法は生物現象・物理現象などの経験的に優れたメカニズムに基づき、準最適解を探索する。例えば、Particle Swarm Optimization [35]は鳥や魚の群としての採餌行動，Differential Evolution [36]は生物の進化過程のメカニズムに基づく手法である。また、メタヒューリスティクスは調整可能なパラメータを有しており、パラメータの自由度を活用し、問題構造や探索条件に応じて適切に設定することで効率的に探索を行うことができる。このように、優れた汎用性・探索性能を有するメタヒューリスティクスは、工学的な価値が高い最適化手法として注目されている[29][30][31]。

メタヒューリスティクスという枠組みの登場以来、2005年のArtificial Bee Colony Algorithm [37]，2008年のFirefly Algorithm [34][38][39]，2009年のCuckoo Search [34][40]など、新たな手法の開発はますます活発となっている。

これらの背景を踏まえ、本論文でも、メタヒューリスティクスを研究対象として扱っている。

## 2.2 多目的最適化問題

人間が意思決定を行う時、その多くは複数の指標を同時に考慮する必要がある。例えば、アパートを選ぶ際は「家賃」、「駅からの距離」、「間取り」など多くの観点から検討を行う。また、製品の設計では「耐久性」、「軽さ」といった相反する基準についてバランスをとる必要がある。このような、複数の目的を同時に考慮して最も良い選択（解の決定）を行う問題は多目的最適化問題として定式化される[2]。以下では、すべての目的関数を最小化する場合について、多目的最適化問題の概要、多目的最適化に対する要求、多数目的最適化、多目的最適化の評価指標について述べる。

### 2.2.1 多目的最適化問題の諸定義

決定変数ベクトルを  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , 実行可能領域を  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  とした時,  $r$  目的の目的関数ベクトル  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})]^T$  を最小化する多目的最適化問題は次のように定式化される。

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})]^T \quad (2.1)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad (2.2)$$

多目的最適化における解の優劣は、優越関係によって判断される。次式を満たす時、解  $\mathbf{x}$  は解  $\mathbf{y}$  を優越する ( $\mathbf{x} <_p \mathbf{y}$ )。以下,  $k = 1, 2, \dots, r$  である。

$$\mathbf{x} <_p \mathbf{y} \iff \forall k, f_k(\mathbf{x}) \leq f_k(\mathbf{y}) \wedge \exists k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{y}) \quad (2.3)$$

多目的最適化における最適解は、他のすべての解に優越されない解であるパレート解として定義される。パレート解は一般に集合として存在し、それらの間に客観的な優劣関係は生じない。パレート解集合  $\mathbf{PS}$  は次のように与えられる。

$$\mathbf{PS} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} | \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \not< \mathbf{x}\} \quad (2.4)$$

パレート解集合を目的関数空間上で図示したものはパレートフロンティアと呼ばれる。図 2.1 に多目的最適化における決定変数空間の概略図、図 2.2 に多目的最適化における目的関数空間の概略図を示す。

### 2.2.2 進化型多目的最適化手法

発見的近似解法の多くは複数の探索点を用いて探索を行う多点探索型最適化手法である。一方、多目的最適化では唯一の解を求めるのではなく、多様な解から構成される解集合を獲得することが要求される。多点探索型の発見的近似解法に対して探索点がそれぞれ異なる解に収束するような機能を埋め込むことができれば、一度の探索で複数の解を同時に獲得することができるため、手法の探索メカニズムと問題の目標の観点から発見的近似解法と多目的最適化の親和性は高いと言える。以上の背景を踏まえ、発見的近似解法を多目的最適化に応用した手法（進化型多目的最適化手法）の研究が盛んに行われている。

以下では、これまでに提案されてきた進化型多目的最適化手法を「優越関係に基づく手法」、「分割に基づく手法」、「Indicatorに基づく手法」に分類し、その特性について議論する。多目的最適化の本質的な難しさは、優れた解を判断し、次世代の解を選ぶ「選択操作」の困難さにあると考える。多目的最適化では、優越関係が完全順序関係ではなく比較不能な場合を許容していることに対して、解の優劣を決定付ける必要がある。上記3つの手法

では、それぞれが異なる基準を用いて解の優劣を判断している。

### 分割に基づく手法

分割に基づく手法 (Decomposition-based approach) について述べる。分割に基づく手法では、スカラー化関数と重みベクトル集合を用いることで、多目的最適化問題を複数の単一目的最適化問題の集合と捉えて探索を行う。スカラー化関数としては荷重和[2]や重み付けチェビシェフノルム[41], Penalty-based Boundary Intersection (PBI) [42]が主に用いられる。

重みベクトル集合を  $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  とする。ここで、各重みベクトルは  $\sum_{j=1}^r w_j = 1, \forall j, w_j \geq 0$  を満たす。スカラー化関数を  $S(\mathbf{f}|\mathbf{w}, \mathbf{z})$  とする。 $\mathbf{z}$  はスカラー化関数を用いる際の基準となる点であり、スカラー化関数に応じて理想点 (Ideal Point) あるいは最悪点 (Nadir Point) を指定する。例えば、代表的なスカラー化関数である重み付けチェビシェフノルムでは、重みベクトル  $\mathbf{w} = [0.6 \ 0.4]$  に対して図 2.3 のように対応するパレート解を獲得できる。

分割に基づくアプローチでは、重みベクトル集合によって多目的最適化問題を複数の単一目的最適化問題に分割し、それぞれの単一目的最適化問題を解くことで優れた近似パレート解集合を獲得する。

### Indicator に基づく手法

Indicator に基づく手法[43]では、探索点集合によるパレートフロンティアの近似精度を直接評価することで、探索点集合によるパレートフロンティアの近似精度を最大化するように探索を行う。探索点集合を評価するための Indicator Function として、しばしば Hypervolume が用いられる。Hypervolume (HV) [44]は参照ベクトルと近似パレート解によって張られる超体積として定義される。収束性・広がり・一様性を同時に評価する。HV が大きいほど、パレートフロンティアの近似精度が高いと判断する。HV の概略図を図 2.4 に示す。Hypervolume は優越関係を保存可能であり、収束性・広がり・一様性のすべてを複合した評価が可能なことから、Hypervolume を用いた Indicator に基づく手法が複数提案されている。

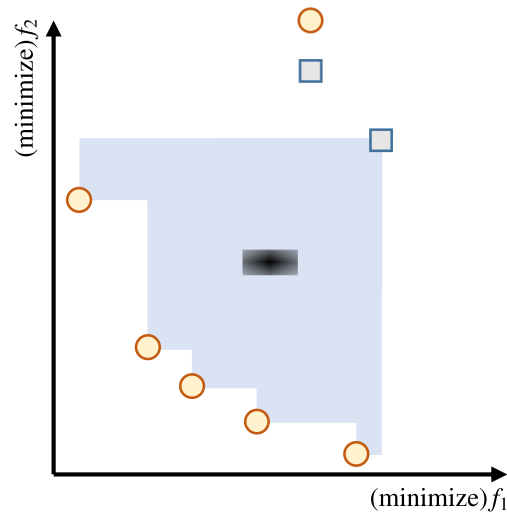


図 2.4 : パレートフロンティアの近似精度の評価指標である HV の概略図

### 優越関係に基づく手法

優越関係に基づく手法（Dominance-based approach）について述べる。優越関係に基づく手法では，他の探索点に優越されていない探索点を優先的に次世代の探索点として選択することで，パレートフロンティアへ探索点を収束させる。例えば，代表的な優越関係に基づく探索点の順位付け操作である Non-dominated Sorting [45]では，他の解に優越されない解ほど高い順位が与えられるように，非劣な度合いに応じて解集合を階層的に順位付ける。Non-dominated Sorting の概略図を図 2.5 に示す。これにより，高い順位（rank）を与えられた解はパレートフロンティアに近いと判断できるため，順位に応じた選択を行うことでパレートフロンティアへの収束を実現できる。また，優越関係によって差が生じない解の比較は多様性維持への貢献度に基づき行う。この操作により，収束性と多様性の双方に優れた解集合の獲得を期待する。

本論文の提案の着想を得た手法である。



## 2.3 優良解集合探索問題

本章では、最適化の実応用において、前節 2.1, 2.2 で紹介した従来の最適化によるアプローチでは、十分に考慮することが難しい要求の存在について指摘する。さらに、このような要求を満たすための優良解集合探索問題を提案・定式化する。最後に、提案した優良解集合探索問題のための最適化アルゴリズムに要求される性質について考察する。

### 2.3.1 最適化の実応用における要求

最適化の実応用において、一般的な単一目的最適化では十分に考慮することが困難な「不測の事態を想定した複数の代替案の提示」や、一般的な多目的最適化では十分に考慮することが困難な「定式化や客観的評価が困難な目的の考慮」などが要求される。

不測の事態を想定した代替案の提示が必要になる例として、① 最短経路探索問題における事故や渋滞の考慮[46]、② 生産計画問題における操業環境の変化に対する対応[47]、③ 形状設計最適化問題における技術的課題発生の考慮などが挙げられる。① 単一目的最適化の実応用としての最短経路探索問題では、事故や渋滞の影響を避けるために複数の経路（候補）が必要となる場合がある。しかしながら従来の単一目的最適化では、出発地点から目標地点までに無数の経路が存在する中で距離が最短となる唯一の経路の組合せを探索するため、複数の代替案を提示することは困難である。② 単一目的最適化の実応用としての生産計画問題では、操業環境の変化が起きた場合に迅速に対応できるよう、工程の組合せが複数必要となる場合がある。しかしながら従来の単一目的最適化では、生産にかかるコストを最も低減できる唯一の工程の組合せを探索するため、複数の代替案を提示することは困難である。③ 単一目的最適化の実応用としての形状設計最適化問題の例では、設計の段階において技術的な課題が発生した場合、代替となる設計案が必要になる。しかしながら従来の単一目的最適化では、物理特性を最適化する唯一の寸法の組合せを探索するために、複数の代替案を提示することは困難である。このように従来の単一目的最適化では、唯一の大域的最適解、あるいは準最適解の探索を目標とするため、実応用において要求される代替案となりうる複数の解を提示することは困難である。

また、定式化や客観的評価が困難な目的の考慮が必要な例として、④ 形状設計最適化問

題におけるデザインの考慮[3]や、⑤ 最短経路探索問題における運転者の好みの考慮[48]などが挙げられる。④ 形状設計最適化問題の例として自由曲面シェル構造の形態最適化を考えると、このような自由曲面シェル構造の形態最適化においてはデザインと構造的な合理性を同時に考慮できることが望ましい。⑤ 最短経路探索問題においては、目的地までの距離と移動する人の好み（道幅が広い経路，直進が多い経路など）を同時に考慮できることが望ましい。しかし，従来の多目的最適化では，客観的評価が可能な目的を主として扱うため，デザインと構造的な合理性を同時に考慮することや目的地までの距離と移動する人の好みを同時に考慮することは難しい。従って，従来の多目的最適化では定式化や客観的評価が困難な目的の考慮は困難であるといえよう。以上のように最適化の実応用においては，従来の最適化によるアプローチで満たすことが困難な要求が複数存在する。

### 2.3.2 優良解集合探索問題の概要

前節で述べたように，最適化の実応用では従来の最適化で十分に考慮することが困難な要求が存在する。このような要求を満たすためには，使用者の希求水準を満たし，かつ多様な解の集合を求めることが有効な手段であると考ええる。本論文ではこのような解集合を，「優良解集合」と呼ぶこととする。一定以上の性能を持ち，かつ解相互の性質が大きく異なる複数の解をあらかじめ探索しておくことで，前節で述べた「不測の事態」に応じることが期待される。また，優良解集合の中から使用者の選好に応じて解を選択することで，「定式化や客観的評価が困難な目的」を考慮することが期待される。

そこで，使用者の希求水準を満たし，かつ解相互の性質が大きく異なる多様な解から構成される優良解集合の探索を目標とした優良解集合探索問題を提案・定式化する。最適化における希求水準は目的関数値が一定以上優れることであり，解の性質の違いは決定変数の相違の程度（解空間における距離）で評価できると著者らは考える。

上述のことを踏まえ，使用者が定めた基準よりも目的関数値が優れ，かつ解相互の距離が遠く離れた解から優良解集合が構成されるように，概念の提案とそれに基づく定義を行う。この優良解集合から最終的な解を与えることで，実応用における要求も考慮することが期待される。また，優良解集合には使用者が任意に定めることのできるパラメータが存在する。パラメータにより優良解集合に含まれる解の目的関数値と解相互の距離を調整で

きるため、使用者によって異なる要求に応えることが期待される。

### 2.3.3 優良解集合探索問題の提案

前節に基づいて本論文で提案する優良解集合を定義する。ただし、本論文では目的関数  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ) の最小化問題を扱う。図 2.6 に 1 次元 ( $n = 1$ ) の多峰性関数における優良解集合の例を示す。横軸は決定変数、縦軸は目的関数値を表す。まず、目的関数値を考慮した解集合  $L(\delta)$  を定義する。大域的最適解の目的関数値  $f(\mathbf{x}^*)$  を基準とする目的関数値の制約  $\delta \geq 0$  を満たす解  $\mathbf{x} \in X$  のレベル集合  $L(\delta) \subseteq X$  を式 (2.5) で定義する。ここで  $X$  は実行可能領域を表す。

$$L(\delta) = \{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) + \delta\} \quad (2.5)$$

式 (2.5) と図 2.6(a) より、 $L(\delta)$  は大域的最適解  $\mathbf{x}^*$  と使用者が定めるパラメータ  $\delta$  により定まる、目的関数値を考慮した解集合である。さらに、距離を考慮した解集合  $B(\mathbf{y}; \varepsilon)$  を定義する。任意の解  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対する  $\varepsilon$ -近傍 ( $\mathbf{y}$  を中心とする半径  $\varepsilon > 0$  の開球)  $B(\mathbf{y}; \varepsilon)$  を式 (2.6) で定義する。

$$B(\mathbf{y}; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\} \quad (2.6)$$

式 (2.6) と図 2.6(b) より、 $B(\mathbf{y}; \varepsilon)$  は任意の解  $\mathbf{y}$  と使用者が定めるパラメータ  $\varepsilon$  により定まる、解空間上の距離を考慮した解集合である。最後に、 $L(\delta)$  と  $B(\mathbf{y}; \varepsilon)$  より、優良解集合を定義する。 $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$  ( $\forall \mathbf{x} \in L(\mathbf{x}^*; \delta) \cap B(\mathbf{y}; \varepsilon)$ ) を満たす優良解  $\mathbf{y} \in L(\mathbf{x}^*; \delta)$  の集合として、優良解集合  $S(\delta, \varepsilon)$  を式 (2.7) で定義する。

$$S(\delta, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in L(\delta) \mid f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) \ (\forall \mathbf{x} \in L(\delta) \cap B(\mathbf{y}; \varepsilon))\} \quad (2.7)$$

優良解は  $L(\delta) \cap B(\mathbf{y}; \varepsilon)$  に属するが、 $L(\delta) \cap B(\mathbf{y}; \varepsilon)$  は  $\varepsilon$ -近傍の中心となる  $\mathbf{y}$  により異なる。図 2.6(c) に示すように、 $\mathbf{y} \in L(\mathbf{x}^*; \delta)$  が式 (2.7) における  $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$  の条件を満たす場合、 $\mathbf{y}$  は優良解となる。これに対し、図 2.6(d) に示すように  $\mathbf{y}$  が局所的最適解でない場合には、式 (2.7) における  $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$  の条件を満たさず優良解とはならない。また、図 2.6(e) のように  $\mathbf{y}$  が局所的最適解であっても  $L(\delta)$  に属さない場合には、式 (2.7) における  $\mathbf{y} \in L(\delta)$  を満たさず、優良解とはならない。従って、図 2.6(f) のように、優良解集合  $S(\delta, \varepsilon)$

は大域的最適解の目的関数値からの差が $\delta$ 以内に収まる目的関数値を有し、かつ解相互の距離が $\varepsilon$ 以上離れた、多様な局所的最適解の集合となる。優良解集合の探索を目標とする最適化問題を、優良解集合探索問題として提案する。以上より、使用者がパラメータ $\delta$ と $\varepsilon$ を適切に設定することで、本章の冒頭で述べた希求水準を満たす多様な解集合を定義することが実現できる。

## 2.4 優良解集合の探索に適したアルゴリズムの性質

これまで述べたように、優良解集合は目的関数値が優れ、かつ解相互の距離が離れた複数の局所的最適解から構成される。このような特徴を有する優良解集合を探索するためには、目的関数値が優れ、かつ解相互の距離が離れた複数の局所的最適解の付近（有望領域）を並行して探索できるアルゴリズムが要求される。複数の有望領域を並行して探索するためには、(a) クラスタ間の多様性を保ちつつ、(b) クラスタ内では従来の単一目的最適化手法のように多様化・集中化を行う性質を有することが望ましい。また、モデリングの際に実システムの複雑さを保持できることが望ましいため、直接探索型であることからモデリングに与える制約が少ないメタヒューリスティクスを使用することが望ましい。一方、これまでに提案されてきた多くのメタヒューリスティクスは唯一の大域的最適解・準最適解を探索することを目的としており、各探索点が大域的な探索を行うため、複数の有望領域を並行して探索することが困難である。

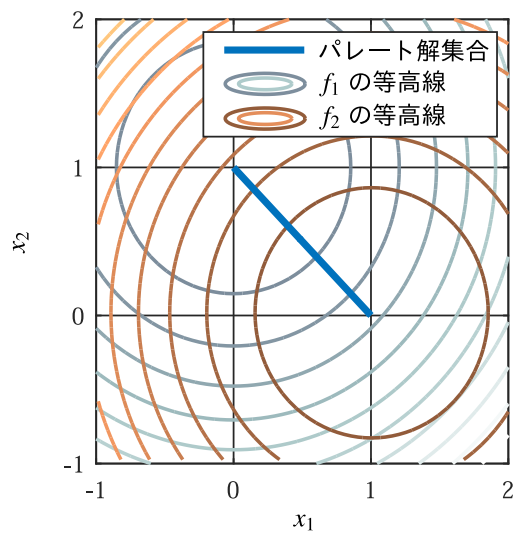


図 2.1 : 多目的最適化における決定変数空間の概略図 (2つの2次関数によって生成されるパレート解集合)

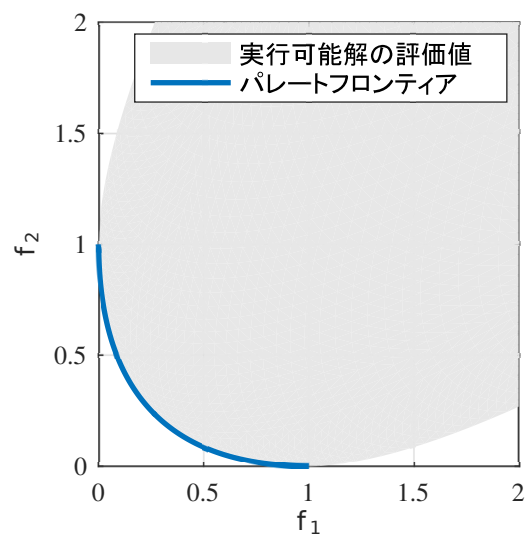


図 2.2 : 多目的最適化における目的関数空間の概略図 (図 2.1 と対応している)

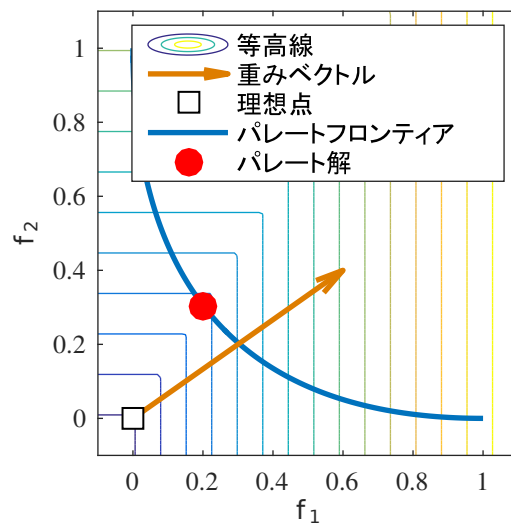


図 2.3 : 重み付けチェビシェフノルムによって獲得されるパレート解

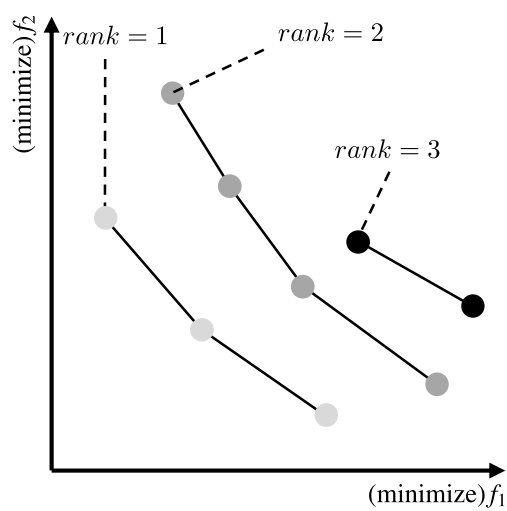
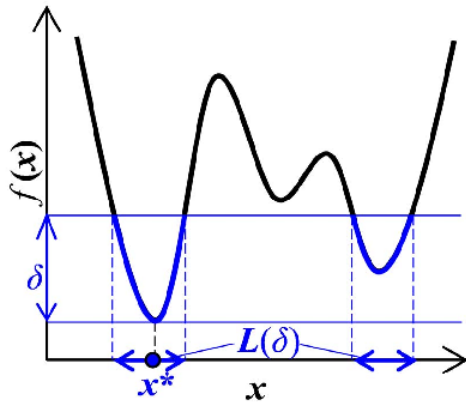
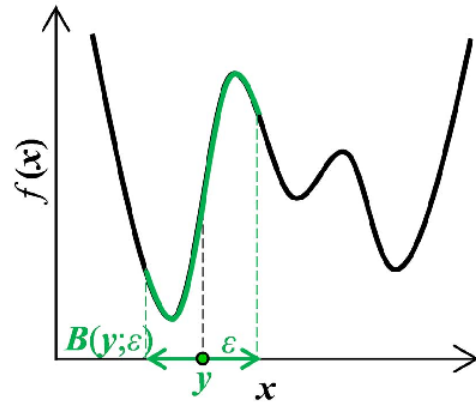


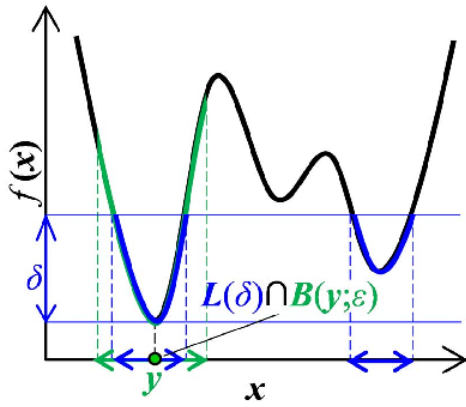
図 2.5 : Non-dominated Sorting の概略図



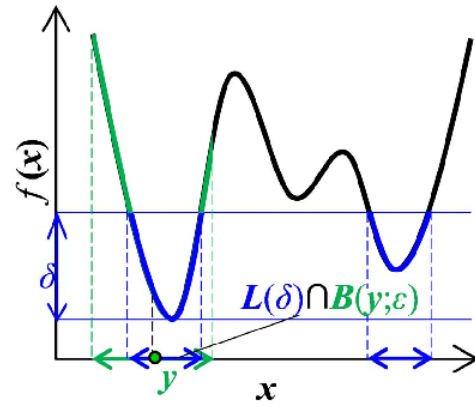
(a)  $L(\delta)$



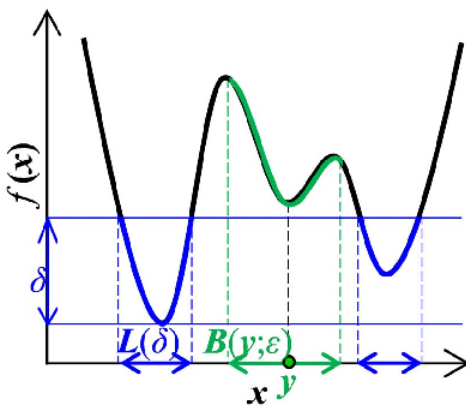
(b)  $B(y; \epsilon)$



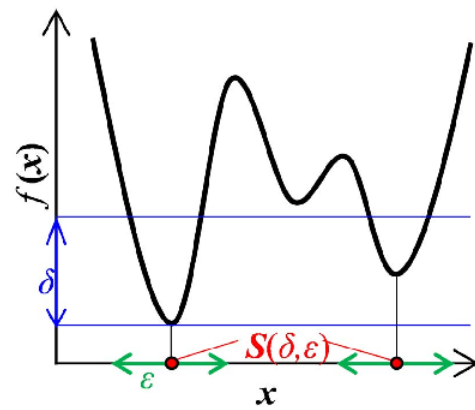
(c)  $L(\delta) \cap B(y; \epsilon)$  of case I



(d)  $L(\delta) \cap B(y; \epsilon)$  of case II



(e)  $L(\delta) \cap B(y; \epsilon)$  of case III



(f)  $S(\delta, \epsilon)$

図 2.6 : 1 次元 ( $n = 1$ ) の多峰性関数における優良解集合の例

# 3

## 代表的なメタヒューリスティクス

本章では，本論文を読む上での事前知識として，提案手法も属する最適化手法のメタヒューリスティクスについて代表的な手法をいくつか紹介する。中でも，3.3の Differential Evolution，3.4の Genetic Algorithm は，本論文の提案手法のベースとなる手法である。

### 3.1 Particle Swarm Optimization

Particle Swarm Optimization は鳥や魚の群れの採餌行動の研究から導かれた「群全体で情報を共有している」という仮定に基づいており，J. Kennedy と R. Eberhart により 1995 年に発表されたメタヒューリスティクスの一手法である[49]。群を構成する各探索点は，各自が有する独自の情報と群全体で共有している情報を基に移動を行う。

$n$  次元における，ある探索点の位置ベクトルを以下の式で表す。ここで  $i$  は探索点の番号， $j$  は位置ベクトルの  $j$  次元成分を表す。

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in})$$

次に，各探索点の速度ベクトルを以下の式で表す。

$$\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{in})$$

さらに，各自が探索の過程で発見した最良解の情報  $\mathbf{pbest}$ ，群全体で共有している最良解



の情報  $gbest$  を以下の式で表す。

$$pbest = (pbest_{i1}, pbest_{i2}, \dots, pbest_{ij}, \dots, pbest_{in})$$

$$gbest = (gbest_1, gbest_2, \dots, gbest_3, \dots, gbest_n)$$

各探索点は上記の情報を全て保持している。さらに、各探索点は  $k$  反復目の位置  $x_i^k$  から、各探索点が有する最良解の情報  $pbest$  へ向かう差分ベクトル  $(pbest_i^k - x_i^k)$ 、群全体で共有している最良解の情報  $gbest$  へ向かう差分ベクトル  $(gbest_i^k - x_i^k)$ 、前回の移動ベクトル  $v_i^k$  の3つのベクトルの重み付きの線形結合として新たな移動ベクトル  $v_i^k$  を生成し、次の位置  $x_i^{k+1}$  へ移動する。Particle Swarm Optimization のアルゴリズムを以下に示す。

### 【Particle Swarm Optimization】

#### Step 0:[準備]

探索点数  $m$ 、各パラメータ  $w$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ 、および最大反復回数  $k_{\max}$  を与える。 $k := 1$  とする。

#### Step 1:[初期化]

各探索点の初期位置  $x_i^1 (i = 1, 2, \dots, m)$  を、乱数に従い実行可能領域  $\mathbf{X}$  内にランダムに与える。さらに、初期速度  $v_i^1 (i = 1, 2, \dots, m)$  を乱数に従いランダムに与える。 $pbest, gbest$  の初期値を与える。

$$pbest_i^1 = x_i^1 (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$gbest^1 = \underset{pbest_i^1}{\operatorname{argmin}} f(pbest_i^1)$$

#### Step 2:[ $x_i, v_i$ の更新]

$x_i$  と  $v_i$  を更新する。ただし、 $rand_1$  と  $rand_2$  は一様乱数を表す。

$$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^k + v_{ij}^{k+1}$$

$$v_{ij}^{k+1} = w \cdot v_{ij}^k + c_1 \cdot rand_1 \cdot (pbest_{ij}^k - x_{ij}^k) + c_2 \cdot rand_2 \cdot (gbest_j^k - x_{ij}^k)$$

**Step 3:**[ $pbest_i, gbest$  の更新]

$pbest_i$  と  $gbest$  を更新する。

$$pbest_i^{k+1} = \begin{cases} x_i^{k+1} & (f(x_i^{k+1}) < f(pbest_i^k)) \\ pbest_i^k & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$gbest^{k+1} = \underset{pbest_i^{k+1}}{\operatorname{argmin}} f(pbest_i^{k+1})$$

**Step 4:**[終了判定]

$k = k_{\max}$  ならば終了する。さもなければ、 $k := k + 1$  として Step 2 へ戻る。

Particle Swarm Optimization の特徴は、鳥や魚の群れの採餌行動を模擬した、群全体で共有している最良解情報  $gbest$  と各個体が有する最良解情報  $pbest$  の活用にある。Particle Swarm Optimization による決定変数空間の探索においては、群全体で共有している最良解情報  $gbest$  へ向かう差分ベクトルの影響が大きく、各探索点は  $gbest$  へ強く引き寄せられる。従って、Particle Swarm Optimization の探索点群は最終的に一箇所の有望領域を集中的に探索することになる。

## 3.2 Firefly Algorithm

Firefly Algorithm は Xin-She Yang らによって 2008 年に提案されたメタヒューリスティクスの一手法であり、蛍の各個体が移動する際に他の個体が発する光に影響されるアナロジーに基づいた手法である[50, 51]。Firefly Algorithm の実応用と改良案に関しては、様々な検討がなされている[52]。以下では Firefly Algorithm の概要について簡単に述べる。

Firefly Algorithm は以下のルールに基づいて蛍の求愛行動を模擬している。

- 1) 全ての個体は性別に関係なく他の個体に魅かれる。
- 2) 魅力は各個体の明るさ（光強度）に比例する。各個体は自身よりも魅力が高い、明るい個体の方向へ向かって移動する。
- 3) 光源となっている個体から、観測点となる個体までの距離の増加に応じて明るさは減衰する。
- 4) 探索点群中の最も明るい個体はランダムに移動する。
- 5) 明るさは目的関数値の影響を受ける。最大化問題であれば、明るさは目的関数値に比例する。

探索点数を  $m$ 、反復回数  $k$  における各探索点を  $\mathbf{x}_i^k (i = 1, 2, \dots, m)$  とする。Firefly Algorithm では、各探索点  $\mathbf{x}_i^k$  の光強度  $I_i$  が式 (3.1) により定義される。ここで  $f_{\min}$  は、反復回数  $k$  における各探索点の目的関数値の中で最も良い目的関数値を表す。

$$I_i = (|f_{\min} - f(\mathbf{x}_i^k)| + 1)^{-1} \quad (3.1)$$

式 (3.1) より、探索点  $\mathbf{x}_i^k$  の目的関数値が優れるほど光強度は強まる。各探索点  $\mathbf{x}_i^k$  は、移動の際に光強度  $I_i$  が自身よりも強い探索点を参照する。さらに、探索点  $\mathbf{x}_i^k$  は式 (3.2) に従って移動する。ここで、 $\hat{\mathbf{x}}_s^k$  は参照した解、 $\mathbf{r}$  は  $[-0.5, 0.5]^n$  の範囲を取り得る一様乱数ベクトルを表す。

$$\mathbf{x}_i^k := \mathbf{x}_i^k + \beta_i^k (\hat{\mathbf{x}}_s^k - \mathbf{x}_i^k) + \alpha \mathbf{r} \quad (3.2)$$

また、 $\beta_i^k$  と  $\alpha$  は以下に示す式 (3.3)、式 (3.4) でそれぞれ表される。ここで、 $\beta_0$  (推奨値は 1.0) は  $\beta_i^k$  の最大値を定めるパラメータ、 $\gamma$  は  $\beta_i^k$  が従うガウス分布の形状を定めるパラメータを表す。また、 $\alpha_0$  は  $\alpha$  の最大値を定めるパラメータ、 $\eta \in [0, 1]$  は  $\alpha$  が従う減少スケジュール

を定めるパラメータを表す。

$$\beta_i^k = \beta_0 e^{-\gamma \|\hat{\mathbf{x}}_s^k - \mathbf{x}_i^k\|^2} \quad (3.3)$$

$$\alpha = \alpha_0 \eta^k \quad (3.4)$$

なお  $\alpha$  は元々固定値で提案されているが[50]，後に Firefly Algorithm の提案者らにより式 (3.4) の指数関数スケジューリングが提案されている[51]。各探索点  $\mathbf{x}_i^k$  は参照する解  $\hat{\mathbf{x}}_s^k$  が無くなるまで上記の移動を繰り返す。また，光強度が最も強い探索点  $\mathbf{x}_i^k$  は式 (3.5) に従ってランダムに移動する。

$$\mathbf{x}_i^k := \mathbf{x}_i^k + \alpha \mathbf{r} \quad (3.5)$$

全ての探索点が移動を終えたら，評価して次の反復に移る。Firefly Algorithm のアルゴリズムを以下に示す。

### 【Firefly Algorithm】

#### Step 0 : [ 準備 ]

最大反復回数  $k_{\max}$ ，探索点数  $m$ ，各パラメータ  $\beta_0, \gamma, \alpha_0, \eta$  を定める。反復回数  $k = 1$  とする。

#### Step 1 : [ 初期化 ]

乱数を用いて，実行可能領域  $\mathbf{X}$  内に各探索点  $\mathbf{x}_i^1 (i = 1, 2, \dots, m)$  をランダムに生成する。また， $\hat{\mathbf{x}}_i^1 = \mathbf{x}_i^1$  とし，探索点情報を保存する。

#### Step 2 : [ 光強度に基づく探索点のランキング ]

光強度  $I_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を更新する。

$$f_{\min} = \min\{f(\mathbf{x}_j^k) | j = 1, 2, \dots, m\}$$

$$I_i = (|f_{\min} - f(\mathbf{x}_i^k)| + 1)^{-1} \quad (3.6)$$

各探索点を  $I_i$  の非減少順に並び替え， $\hat{\mathbf{x}}_i^k = \mathbf{x}_i^k (i = 1, 2, \dots, m)$  とおく。また， $i = 1, s = 1$  とおく。

**Step 3 : [ 探索点の移動 ]**

$I_i < I_s$  ならば  $\mathbf{x}_i^k$  を移動し,  $s := s + 1$  とする。

$$\mathbf{x}_i^k := \mathbf{x}_i^k + \beta_i^k (\hat{\mathbf{x}}_s^k - \mathbf{x}_i^k) + \alpha \mathbf{r} \quad (3.7)$$

$$\beta_i^k = \beta_0 e^{-\gamma \|\hat{\mathbf{x}}_s^k - \mathbf{x}_i^k\|^2}, \alpha = \alpha_0 \eta^k \quad (3.8)$$

また,  $\mathbf{r} \in [-0.5, 0.5]^n$  は一様乱数ベクトルを表す。さもないければ移動を行わず,  $s := s + 1$  とする。以上の操作を  $s = m - 1$  まで繰り返す。

**Step 4 : [ 光強度の最も強い探索点の移動 ]**

$i := i + 1$  とする。 $i < m$  ならば  $s = 1$  として **Step 3** へ戻る。さもないければ, 光強度の最も強い探索点を移動する。

$$\mathbf{x}_i^k := \mathbf{x}_i^k + \alpha \mathbf{r}$$

**Step 5 : [ 探索点の更新 ]**

全ての探索点  $\mathbf{x}_i^k$  を評価し, 更新する。

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k, \hat{\mathbf{x}}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k$$

**Step 6 : [ 終了判定 ]**

$k = k_{\max}$  ならば終了する。さもないければ  $k := k + 1$  として **Step 2** に戻る。

Firefly Algorithm の特徴は, 蛍を模擬した光強度に基づく解の参照, 参照した解へ向かう差分ベクトルによる移動, 移動する探索点と参照した解までの距離の増加に従ったパラメータ  $\beta_i^k$  の減少にあり, これらの相互作用により探索点群が複数に分かれる。

### 3.3 Differential Evolution

Differential Evolution は a) 微分不可能な非線形の多峰性関数を扱うこと, b) 並列計算ができること, c) パラメータが扱いやすい (環境の変化に対してロバストであったり, 調整しやすい) こと, d) 収束性が良いことなどの実応用における要求に応えるため, R. Storn と K. Price により 1995 年に発表されたメタヒューリスティクスの一手法である [53]。Differential Evolution (差分進化法) は Particle Swarm Optimization などに用いられる差分ベクトルと Genetic Algorithm などの進化論的アルゴリズムに用いられる交叉と選択則を活用して探索を行う。Differential Evolution のアルゴリズムを以下に示す。

#### 【Differential Evolution】

##### Step 0:[準備]

解ベクトルの次元数  $n$ , 探索点数  $m$ , 膨張率  $F$ , 交叉率  $CR$ , 最大反復回数  $k_{\max}$  を与える。  $k = 1$  とする。

##### Step 1:[初期化]

乱数を用いて実行可能領域  $\mathbf{X}$  内に各探索点  $\mathbf{x}_i^1 (i = 1, 2, \dots, m)$  をランダムに生成する。

##### Step 2:[突然変異]

全操作ベクトル  $\mathbf{x}_i^k$  に対して, 互いに異なるようランダムに選出された  $\mathbf{x}_{r1}^k, \mathbf{x}_{r2}^k, \mathbf{x}_{r3}^k$  と膨張率  $F$  を用いて, 次式の変異ベクトル  $\mathbf{v}_i^k \in R^n$  を生成する。

$$\mathbf{v}_i^k = \mathbf{x}_{r1}^k + F \cdot (\mathbf{x}_{r2}^k - \mathbf{x}_{r3}^k)$$

##### Step 3:[交叉 (一様交叉)]

全操作ベクトル  $\mathbf{x}_i^k$  に対して, 交叉開始点  $a$  を決定し, 操作ベクトルの要素  $x_{i,j}$  毎に交叉率  $CR$  を用いて交叉判定を行う。  $x_{i,j}^k$  と  $v_{i,j}^k$  の要素を次式のように置換し, 試験ベクトル  $\mathbf{u}_i^k \in R^n$  を生成する。

$$u_{i,j}^k = \begin{cases} v_{i,j}^k & (r_j \leq CR \text{ or } j = a) \\ x_{i,j}^k & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

**Step 4:[選択]**

全操作ベクトル  $\mathbf{x}_i^k$  に対して、次式のように  $\mathbf{u}_i^k$  との比較を行い、優れた目的関数値を持つ解ベクトルを  $\mathbf{x}_i^{k+1}$  とする。

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^k & f(\mathbf{u}_i^k) \leq f(\mathbf{x}_i^k) \\ \mathbf{x}_i^k & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

**Step 5:[終了判定]**

$k := k + 1$  とし、 $k = k_{\max}$  であれば終了する。さもなければ、Step 2 へ戻る。

Differential Evolution（差分進化法）の特徴は、差分ベクトルの使用と生物の進化を模倣した交叉と選択則にあり、これらは手法の名称としても用いられている。Differential Evolution はランダムに選出された探索点から他のランダムに選出された探索点へ向かう差分ベクトルを生成し、その差分ベクトルに従った変異ベクトル  $\mathbf{v}_i^k$  の生成を行う。Differential Evolution の各探索点は良い目的関数値を有する解を探索すると必ず更新するため、各探索点は現時点よりも良い目的関数値を有する解が存在する領域を探索する。従って、Differential Evolution の探索点群は最終的に一箇所の有望領域に集中する。

### 3.4 Genetic Algorithm

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm; GA) [54] は個体群ベースのメタヒューリスティクスであり、GA はその中に位置するアルゴリズムの一つである。GA では、現世代の個体への交叉、突然変異などの進化操作と、個体群から優れた個体の選択を繰り返し行うことで、探索が行われる。現世代における個体を親個体と呼び、第  $G$  世代目の親個体が持つ解を  $\mathbf{x}_i^G$  と表す。ここで、本実験で使用する記号を表 3.1 に示す。

交叉では、 $m$  個の親個体  $\mathbf{x}_i^G$  で構成される群から 2 個のサンプル個体  $\mathbf{x}_a^G, \mathbf{x}_b^G$  を選び出し、サンプル個体が持つ要素を交換することで、新たな子個体を 2 個生成する。これを  $m$  回行うことで、 $2m$  個の子個体で構成される群を生成する。

突然変異では、各子個体の要素を変異させ、それを新たな子個体とする。

選択では、 $2m$  個の子個体で構成される群から、優れた  $m$  個の個体を選び出し、それらを次世代へ残す親個体  $\mathbf{x}_i^{G+1}$  とする。



表 3.1：記号の定義

手法	記号	定義
GA	$m(\geq 2)$	個体数
	$n$	個体の要素数
	$G$	反復回数 (世代数)
	$G_{\max}$	反復回数の上限
	$i(= 1, 2, \dots, m)$	個体の番号
	$j(= 1, 2, \dots, n)$	個体の要素成分
	$x_i^G$	$i$ 番目の個体
	$x_a^G, x_b^G$	親個体群からランダムに 選出されたサンプル個体
	$a(= 1, 2, \dots, n-1)$	交叉の開始点
	$Pc(0 \leq Pc \leq 1)$	交叉判断率
	$Pm(0 \leq Pm \leq 1)$	突然変異率
	$CR(0 \leq CR \leq 1)$	交叉率
	rand	0 から 1 の間に 分布する一様乱数
DP	$n$	アイテムの個数
	$j(= 1, 2, \dots, n)$	アイテムの要素番号
	$B_j$	$j$ 番目のアイテム
	$a_j$	$B_j$ の重量
	$c_j$	$B_j$ の価値
	$b$	ナップサックの許容重量
	$x_j \in \{0, 1\}$	決定変数

以下に，GA のアルゴリズムを示す。

### 【Genetic Algorithm】

#### Step 0:[準備]

1 試行における最大反復回数  $G_{\max}$ ，交叉判断率  $P_c$ ，交叉率  $CR$ ，個体数  $m$  を定め， $G = 0$  とする。

#### Step 1:[初期化]

親個体の初期解  $x_i^0$  をランダムに定め， $m$  個の親個体の集合を親個体群とする。

#### Step 2:[交叉]

親個体群からランダムに選出した2個のサンプル個体  $x_a^G, x_b^G$  に対して交叉判定を行う。 $\text{rand} < P_c$  を満たすならば交叉を実行し，生成された個体を子個体とし，満たさなければ交叉を実行せず，サンプル個体を子個体とする。これを  $m$  回行うことで生成した  $2m$  個の子個体の集合を子個体群とする。

#### Step 3:[突然変異]

各子個体の要素を変異させ，それらの集合を新たな子個体群とする。

#### Step 4:[選択]

$2m$  個の子個体で構成される子個体群から優れた  $m$  個の個体を選択し，それらを次世代の親個体  $x_i^{G+1}$  とする。

#### Step 5:[停止基準の確認]

$G = G_{\max}$  ならば計算を終了し，さもなければ  $G := G + 1$  として Step 2 へ移る。

# 4

## 優良解集合探索問題のための優越関係の提案

### 4.1 優良解集合探索問題の再定義

本論文では、実行可能領域を  $X \subseteq \mathbf{R}^n$ ，決定変数を  $x \in X$ ，評価関数を  $f(x)$  とした時の最小化問題を扱う。

優良解集合は、実応用におけるニーズに答えるために、「大域的最適解との評価値の差が一定以内に収まる」かつ「他の局所的最適解との距離が一定以上離れている」ような局所的最適解の集合として定義される。以下では、ユーザーから与えられる評価値に対する制約を  $\delta \geq 0$ ，解同士の距離に対する制約を  $\varepsilon > 0$  とし、「大域的最適解との評価値の差が  $\delta$  以内に収まる」かつ「他の局所的最適解との距離が  $\varepsilon$  以上離れる」という条件を満たす局所的最適解から構成される優良解集合を定義する。優良解集合は文献[4]および本論文の 2.3 節において著者らが定義しているが、本論文では以降で述べる優良解集合探索問題の解析や探索への活用を行うために、文献[4]および本論文の 2.3 節における定義では言及されていない 2 つの関係を新たに定義した後、定義した関係を用いて優良解集合を定義する。文献[4]および本論文の 2.3 節とは記述方法が異なっているが、定義される解集合は等価である。

評価値の制約を用いた関係の定義：評価値に対する制約を取り込むために次の関係を定義する。2 つの解  $x_1, x_2 \in X$  について、次の条件を満たす時、 $x_1$  は  $x_2$  より評価値の制約の下で優れる ( $x_1 <_\delta x_2$ )。

$$x_1 <_\delta x_2 \Leftrightarrow f(x_1) + \delta < f(x_2)$$

$x \in X$  がすべての実行可能解に対して上記の関係を用いて劣らない, すなわち  $\forall y \in X, y \not\prec_\delta x$  を満たす時,  $x$  は大域的最適解との評価値の差が  $\delta$  以内となる解であり, 「大域的最適解との評価値の差が一定以内の解」に対応する。

距離の制約を用いた関係の定義: 解同士の距離に対する制約を取り込むために, 次の関係を定義する。距離関数  $d$  を与える。 $x \in \mathbf{R}^n$  に対する  $\varepsilon$ -近傍  $B(x; \varepsilon)$  を, 次式で定義する。

$$B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

2つの解  $x_1, x_2 \in X$  について, 次の条件を満たす時,  $x_1$  は  $x_2$  より距離の制約の下で優れる ( $x_1 <_\varepsilon x_2$ )。

$$x_1 <_\varepsilon x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \wedge x_1 \in B(x_2; \varepsilon)$$

$x \in X$  がすべての実行可能解に対して上記の関係を用いて劣らない, すなわち  $\forall y \in X, y \not\prec_\varepsilon x$  を満たす時,  $x$  は距離  $\varepsilon$  より近くに自身より優れた解の存在しない局所的最適解であり, 「距離の一定以上離れた局所的最適解」に対応する。以下, 距離としてユークリッド距離を用いる。

優良解集合の定義: これまでに定義した関係を用いて, すべての実行可能解  $x \in X$  に劣らない解の集合として, 優良解集合  $S(X; \delta, \varepsilon)$  を次のように定める。

$$S(X; \delta, \varepsilon) = \{x^* \in X \mid \forall x \in X, x \not\prec_\varepsilon x^* \wedge x \not\prec_\delta x^*\}$$

優良解集合  $S(X; \delta, \varepsilon)$  は, 大域的最適解との評価値の差が  $\delta$  以内であり, かつ解相互の距離が  $\varepsilon$  以上離れた局所的最適解の集合となる。優良解集合  $S(X; \delta, \varepsilon)$  を発見することを目的とした問題を, 優良解集合探索問題として定式化する。

## 4.2 優良解集合探索問題の考察

優良解集合は、評価値が一定以上良く、かつ解相互の距離が一定以上離れた（決定変数の値が大きく異なった）解集合である。これは、使用者の希求水準を満たす、解相互の性質が大きく異なる解集合である。具体例として、自動車の形状設計問題を考える。評価関数を空力特性、設計変数を幅・高さ・長さのパラメータとして定式化する。従来の単一目的最適化では、唯一の解のみを求めるため、解は一意的に決定される。つまり、空力特性のみを最適化した唯一の解が得られる。これに対し、優良解集合探索問題では、空力特性に優れ、形状が大きく異なる解の集合を求めることが期待できる。そして求めた解集合の中から、使用者の選好に応じて解を選択する。これにより、評価関数として定式化することが困難な外観（人間の主観）も考慮したうえで最終案を決定できる。そのため、優良解集合探索問題は工学的価値が高いといえる。

この優良解集合探索問題における研究の課題として、(1) パラメータ  $(\delta, \varepsilon)$  を活用すること、(2) 類似の研究分野の成果の応用が挙げられる。(1) について説明する。優良解集合はユーザーの希求水準を満たす局所解の集合である。一方、従来の単一目的最適化手法は、唯一の大域的（準）最適解の探索を目的としているため、ユーザーの希求水準を満足する複数の解を獲得することが困難である。そこで著者らは、Firefly Algorithm(FA)に注目した。FAは探索の過程で探索点群が複数に分かれる探索ダイナミクスを持つ。このダイナミクスが、優良解集合の探索に適していると考えた。そして文献[5, 4, 6]や、文献[7]などにおいて、優良解集合探索問題を解くことのできる手法を提案した。また有用性を数値実験により示した。優良解集合探索問題には、固有のパラメータ  $(\delta, \varepsilon)$  が存在する。しかしこれらの探索手法は、優良解集合探索問題に固有のパラメータである  $(\delta, \varepsilon)$  を含まず、優良解集合を求めることを主目的としていない。優良解集合探索手法の基礎検討であり、これらの手法の目的は優良解集合を包含する複数の局所解集合を獲得することであった。これまでに、パラメータ  $(\delta, \varepsilon)$  を含んだ手法は提案されていない。したがって、この優良解集合探索問題における研究の課題として、パラメータ  $(\delta, \varepsilon)$  を活用することが挙げられる。

(2) について説明する。この優良解集合探索問題の類似・関連する最適化の枠組みとして、Niching methods (for Multimodal Function Optimization) [55, 56]および多目的最適化[45, 57]が存在している。Niching methodsは複数の大域的（あるいは準）最適解を求め

ることを目的とした最適化手法である。多目的最適化は文字通り複数の目的を同時に考慮する。これらは盛んに研究が行われており、その応用が期待できる。先行研究のアプローチは、複数の大域的最適解を探索するため、Niching methods に近い。一方、多目的最適化の知見を活用した例はない。そのため本稿では多目的最適化に注目する。

### 4.3 優良解集合探索問題における優越関係「優良解適合度 $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$ 」の提案

#### 4.3.1 優越関係に基づく進化型多目的最適化手法

優良解適合度に基づく探索手法を提案するにあたり、多目的最適化に注目する。多目的最適化手法は、複数の目的を同時に考慮することのできる最適化手法で、ユーザーの意思決定を支援するために用いられる。この点において、優良解集合探索問題との親和性が高いといえる。多目的最適化手法は、ユーザーの選好情報を事前に取得し利用することで唯一の解を探索する手法と、複数かつ多様な解集合を獲得する発見的近似解法が存在する。進化型多目的最適化手法は後者に該当し、有力な最適化手法として盛んに研究が行われている。著者らは、複数かつ多様な解集合を獲得するという優良解集合探索問題の目的との親和性の観点から、この進化型多目的最適化手法に注目した。進化型多目的最適化手法は、大きく3つに分類される。「優越関係に基づく手法」と、「分割に基づく手法」、「Indicatorに基づく手法」の3つである。中でも今回は、「優越関係に基づく手法」に注目する。代表的な「優越関係に基づく手法」には、NSGA-II [45]、SPEA2 [57]などがあげられる。これらの手法は、探索点同士に優劣による順序関係を付与し、その関係を用いて生存選択を行うことで、非劣解集合の探索を行う。これら多目的最適化における探索アプローチを参考に、優良解集合の定義に基づく解相互の優劣における順序関係を定義し、新たな優良解集合探索問題を提案する。

本論文では、パラメータである  $(\delta, \varepsilon)$  を陽に含む、優良解集合探索問題のための最適化手法の提案を行う。具体的には、まず  $(\delta, \varepsilon)$  を用いた解の優越関係を与える指標として、優良解適合度を定義する。次に定義した優良解適合度に従う進化型優良解集合探索手法を

提案する。

### 4.3.2 優良解適合度の定義

問題固有のパラメータである  $(\delta, \varepsilon)$  と、多目的最適化の知見を活用する手法を提案するため、優良解適合度を定義する。優良解集合探索問題における諸定義に基づいた、問題固有のパラメータである  $(\delta, \varepsilon)$  を用いて解同士に優越関係を与える優良解適合度 ( $fit$ ) を以下に示す。

#### 優良解適合度： $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$

1. 探索点集合を  $P$  とする。各探索点  $x \in P$  について、評価値の制約を用いた集合の定義および距離の制約を用いた集合の定義を基に、自身より優れる探索点  $y \in P$  の数を  $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$  とする。即ち、

$$fit(x, \delta, \varepsilon; P) := |\{y \in P \mid y <_{\delta} x \vee y <_{\varepsilon} x\}|$$

ただし、重複する探索点が存在する場合、1つの探索点を除いて重複する探索点は  $f(x) = \infty$  として優劣の数え上げを行う。

2.  $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$  が小さい解ほど優れていると見なす。 $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$  が等しい場合は評価値がより小さい解ほど優れた解と見なす。

$fit(x, \delta, \varepsilon; P)$  は、その定義の中に優良解集合探索問題固有のパラメータである  $(\delta, \varepsilon)$  を含む。従って、パラメータの活用という研究課題が達成される。この  $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$  により、解同士に優越関係が付与される。多目的最適化の知見を活用して、この  $fit(x, \delta, \varepsilon; P)$  に基づく進化型優良解集合探索問題を提案する。

## 4.4 進化型単目的最適化手法への適用

### 4.4.1 Differential Evolution への適用

一般に知られる有力な単目的最適化手法の一つである DE/rand/1/bin [58, 59] をベースに,  $fit(\mathbf{x}, \delta, \varepsilon; \mathbf{P})$  を用いた新たな優良解集合探索手法, DE-4S/rand/1/bin を提案する。DE-4S/rand/1/bin の疑似コードを Algorithm 1 に示す。 $m$  は個体数,  $F$  はスケーリングファクター,  $CR$  は交叉確率,  $G_{\max}$  は最大世代数を表している。また,  $x_{j,i,G}$  において,  $j$  は次元,  $i$  は個体番号,  $G$  は世代数を表している。 $r_1, r_2, r_3$  は, 互いに異なり, かつ  $i$  とも異なる個体番号である。

今回 DE に  $fit(\mathbf{x}, \delta, \varepsilon; \mathbf{P})$  を適用するにあたり, 従来の DE が解の選択を, 親と子の 1 対 1 で比較更新するのに対し, 親全体と子全体の合わせたすべての探索点の  $fit(\mathbf{x}, \delta, \varepsilon; \mathbf{P})$  に基づく相互比較により, 更新を行うよう変更している。これは, 優良解集合探索問題の性質上, 解単体では優劣関係を定義できず, 探索集団全体の相対的な優劣性で評価が決まることを考えての変更である。

### 4.4.2 Genetic Algorithm への適用

DE と同様に, 一般に知られる有力な単目的最適化手法の一つである GA をベースに,  $fit(\mathbf{x}, \delta, \varepsilon; \mathbf{P})$  を用いた新たな優良解集合探索手法, GA-4S を提案する。GA-4S の疑似コードを Algorithm 2 に示す。S4-GA では, 生存選択でのみ優良解集合の性質を利用したエリート選択を行う。提案手法では, 交叉に Simulated Binary Crossover (SBX) [60], 突然変異に Parameter Based Mutation (PBM) [45] を用いる。



**Algorithm 1** The Algorithmic Scheme for DE-4S/rand/1/bin

---

```

1: procedure DE-4S/RAND/1/BIN( $m, F, CR, \delta, \varepsilon, G_{\max}$ )
  Step 1: Initialization
2:   Give initial solutions  $\mathcal{P}^0$  ( $|\mathcal{P}^0| = m$ ), Set  $G = 0$ 
  Step 2: Generation of New Solutions
3:    $Q^G = \emptyset$ 
4:   for  $i = 1 \dots m$  do
5:     Choose randomly  $\{\mathbf{x}_{r_1,G}, \mathbf{x}_{r_2,G}, \mathbf{x}_{r_3,G} \in \mathcal{P}^G \mid i \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3\}$ 
6:      $\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F * (\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G})$ 
7:     Choose randomly  $\{j_{rand} \leq D \mid j \in \mathbf{N}\}$ 
8:     for  $j = 1 \dots D$  do
9:       if  $rand_i[0, 1] \leq CR \vee j == j_{rand}$  then
10:         $u_{j,i,G} = v_{j,i,G}$ 
11:      else
12:         $u_{j,i,G} = x_{j,i,G}$ 
13:      end if
14:    end for
15:     $Q^G := Q^G \cup \{\mathbf{u}_{i,G}\}$ 
16:  end for
  Step 3: Superior Solution Fitness Assignment
17:   $\mathcal{R}^G = \mathcal{P}^G \cup Q^G$  ( $|\mathcal{R}^G| = 2m$ )
18:  for each  $x_G \in \mathcal{R}^G$  do
19:    for each  $y_G \in \mathcal{R}^G$  do
20:       $fit(x_G, \delta, \varepsilon; P) = |\{y_G \mid y_G <_{\delta} x_G \vee y_G <_{\varepsilon} x_G\}|$ 
21:    end for
22:  end for
  Step 4: Superior Solution Fitness Based Selection
23:  Sort  $\mathcal{R}^G$  in ascending order using  $fit(x_G)$ 
24:   $\mathcal{P}^{G+1} := \mathcal{R}^G[1 : m]$ 
  Step 5: Termination
25:  if  $G < G_{\max}$  then
26:     $G := G + 1$ 
27:    Go to Step 2
28:  else
29:    return Superior solutions in  $\mathcal{P}^{G+1}$ 
30:  end if
31: end procedure

```

---

**Algorithm 2** The Algorithmic Scheme for GA-4S

---

**procedure** GA-4S( $m, p_c, p_m, \delta, \varepsilon, G_{\max}$ )
**Step 1: Initialization**
2: Give initial solutions  $\mathcal{P}^0$  ( $|\mathcal{P}^0| = m$ ), Set  $G = 0$ 
**Step 2: Generation of New Solutions**
 $Q^G = \emptyset$ 

4: **for**  $i = 1 \dots m$  **do**

Choose randomly  $x_{r_1}, x_{r_2} \in \mathcal{P}^G$  ( $r_1 \neq r_2$ )

6:  $q = \text{CROSSOVER-AND-MUTATION}(x_{r_1}, x_{r_2})$ 
 $Q^G := Q^G \cup \{q\}$ 

8: **end for**
**Step 3: Superior Solution Fitness Assignment**
 $\mathcal{R}^G = \mathcal{P}^G \cup Q^G$  ( $|\mathcal{R}^G| = 2m$ )

10: **for each**  $x \in \mathcal{R}^G$  **do**
**for each**  $y \in \mathcal{R}^G$  **do**

12:  $fit(x, \delta, \varepsilon; P) = |\{y \mid y <_\delta x \vee y <_\varepsilon x\}|$ 
**end for**

14: **end for**
**Step 4: Superior Solution Fitness Based Selection**
Sort  $\mathcal{R}^G$  in ascending order using  $fit(x)$ 

16:  $\mathcal{P}^{G+1} := \mathcal{R}^G[1 : m]$ 
**Step 5: Termination**
**if**  $G < G_{\max}$  **then**

18:  $G := G + 1$ 

Go to **Step 2**

20: **else**
**return** Superior solutions in  $\mathcal{P}^{G+1}$ 

22: **end if**
**end procedure**


---

# 5

## 数値実験

本数値実験の目的は、 $fit(\boldsymbol{x}, \delta, \varepsilon; \boldsymbol{P})$  を適用した手法と、適用する前の手法を用いて、先に定義した優良解集合探索問題を解き、最終的に得られた優良解の数でその有用性を比較・検証することにある。まず、対象問題となる優良解集合探索問題を定義し、紹介する。その後、数値実験の条件を示し、その条件に基づき行った実験で得られた結果を、表にして示す。

### 5.1 対象問題の定義

#### 5.1.1 Function 1

対象関数を式 5.1, TABLE.5.1 および Fig.5.1 に示す。この関数は A~F の 6 個の局所的最適解（◆）を有しており、大域的最適解は  $\boldsymbol{x} = [-3, -1.5]$  である。ここに  $(\delta, \varepsilon)$  を加え、優良解集合探索問題となる。

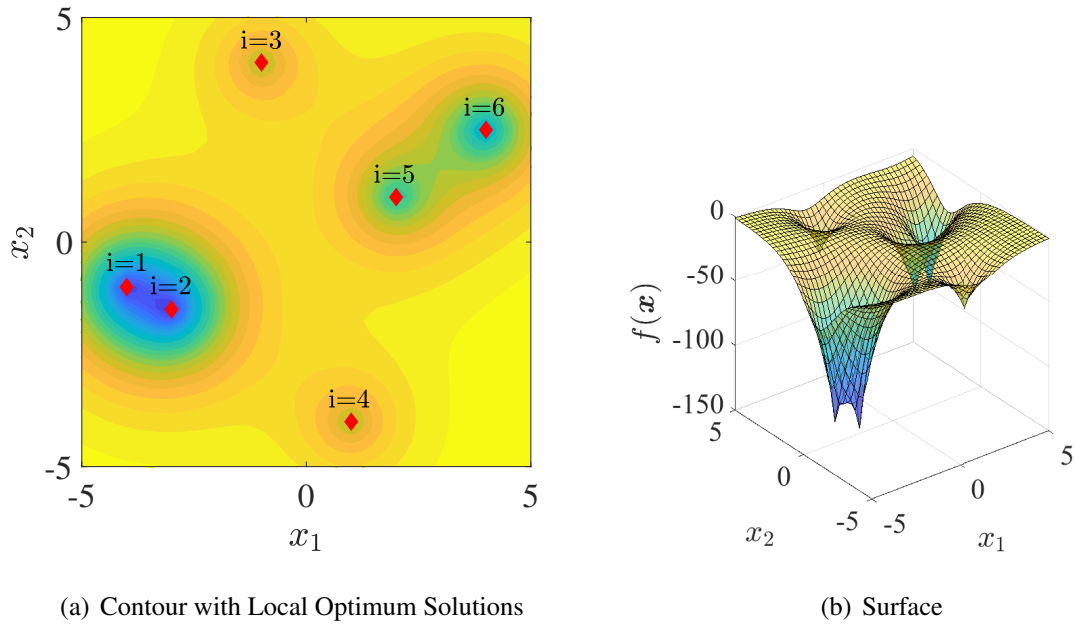


図 5.1 : Function 1

$$f(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^6 \frac{c_i}{\exp(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|)} \quad (5.1)$$

表 5.1 : Parameters of eq.(5.1)

$i$	$\mathbf{a}_i$	$c_i$	$f(\mathbf{x})$
1	$[-4, -1]$	90	-123
2	$[-3, -1.5]$	100	-130
3	$[-1, 4]$	40	-41.9
4	$[1, -4]$	40	-41.6
5	$[2, 1]$	60	-67.9
6	$[4, 2.5]$	80	-85.2

具体例として、この関数を基に優良解集合を定義していく。 $(\delta, \varepsilon)$  と、それにより定義される優良解を Fig.5.2 および TABLE5.2 に示す。Fig.5.2 中の  $\blacklozenge$  は、それぞれの優良解を示している。

表 5.2 : Superior Solution Set Search Problems of Function 1

$\delta$	$\varepsilon$	Solution Set by $i$ of table 5.1 (◆ on Fig.5.2)
30	1	1, 2
	2	2
	3	2
70	1	1, 2, 5, 6
	2	2, 5, 6
	3	2, 6
100	1	1~6
	2	2~6
	3	2~4, 6

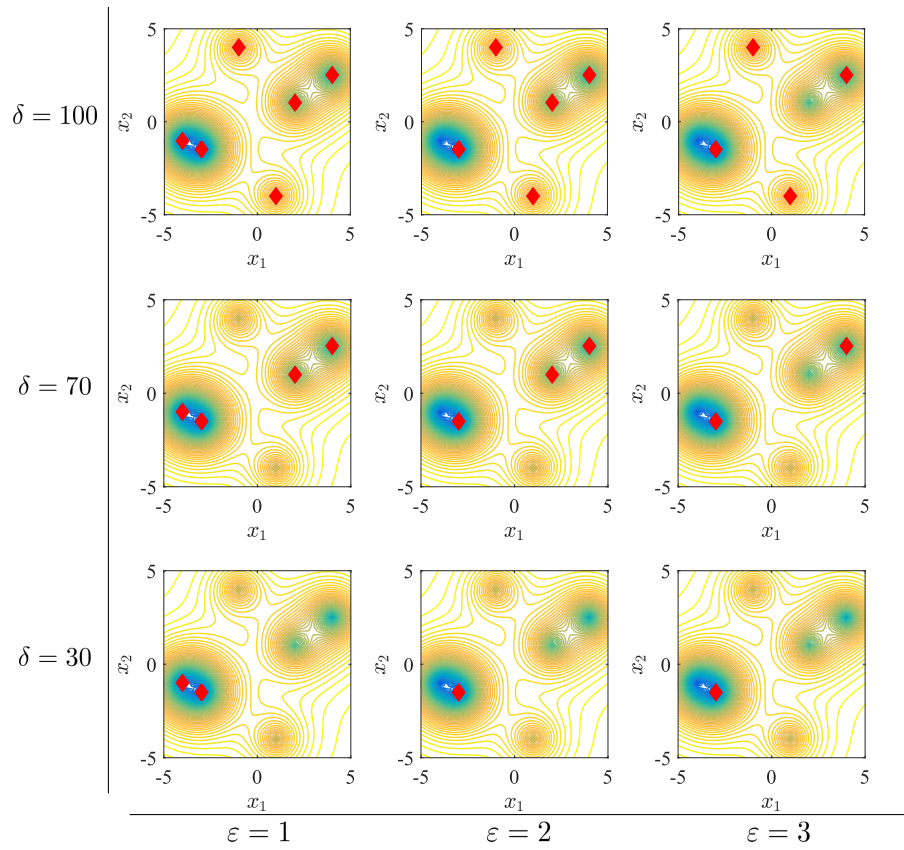


図 5.2 : Benchmark Problems of Function 1

### 5.1.2 Shekel Function

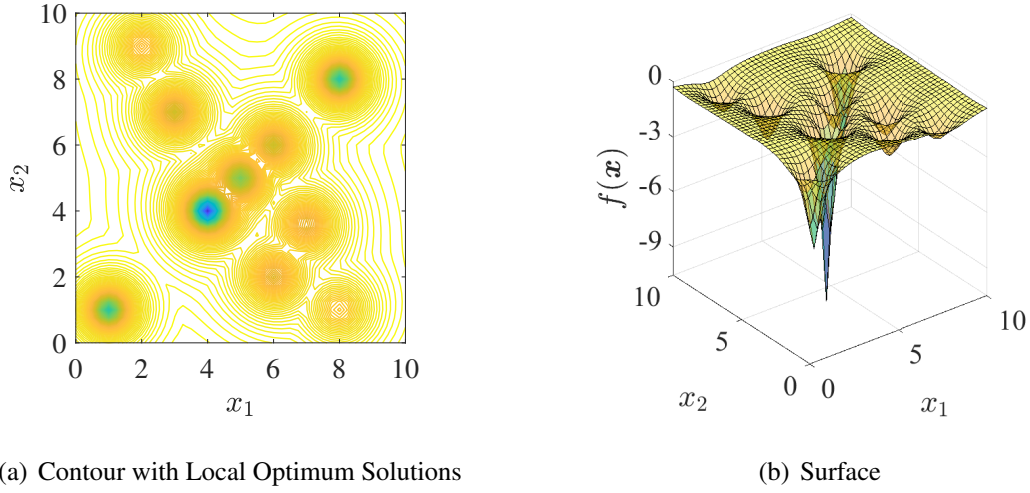


图 5.3 : Shekel Function

$$f(x) = - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^4 (x_j - C_{ij})^2 + \beta_i \right)^{-1}, \text{ where}$$

$$m = 10$$

$$\beta = \frac{1}{10}(1, 2, 2, 4, 4, 6, 3, 7, 5, 5)^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 4.0 & 1.0 & 8.0 & 6.0 & 3.0 & 2.0 & 5.0 & 8.0 & 6.0 & 7.0 \\ 4.0 & 1.0 & 8.0 & 6.0 & 7.0 & 9.0 & 5.0 & 1.0 & 2.0 & 3.6 \\ 4.0 & 1.0 & 8.0 & 6.0 & 3.0 & 2.0 & 3.0 & 8.0 & 6.0 & 7.0 \\ 4.0 & 1.0 & 8.0 & 6.0 & 7.0 & 9.0 & 3.0 & 1.0 & 2.0 & 3.6 \end{pmatrix}$$

表 5.3 : Superior Solution Set Search Problems of Shekel Function

$\delta$	$\varepsilon$	Solution Set by Column Number of $C$ Matrix (◆ on Fig.5.4)
6	0.4	1~5, 7
	0.8	1~5
	1.2	1, 2, 3
8	0.4	1~5, 7, 9, 10
	0.8	1~5, 9
	1.2	1, 2, 3
12	0.4	1~10
	0.8	1~5, 9
	1.2	1, 2, 3, 6, 8

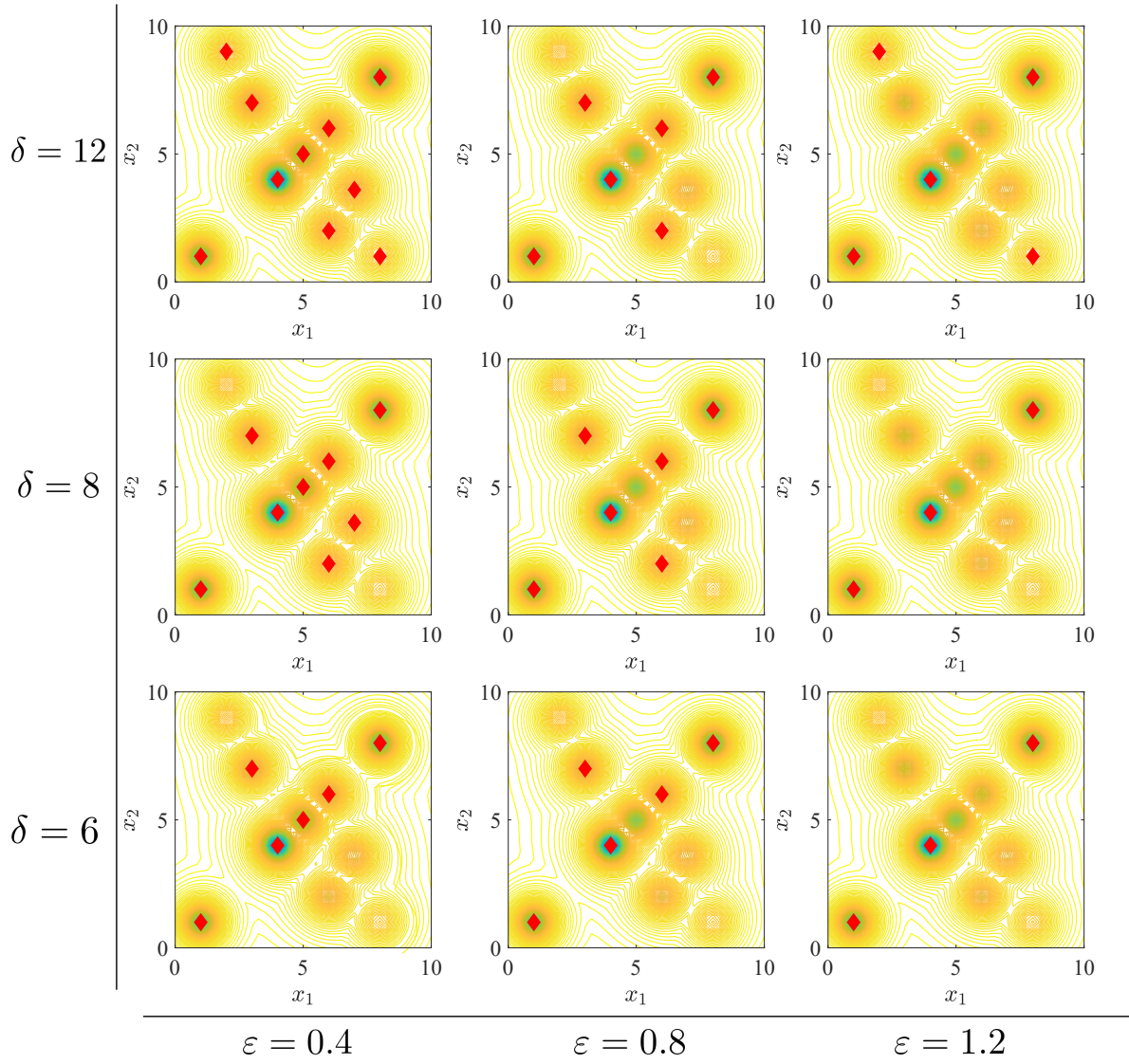


図 5.4 : Benchmark Problems of Shekel Function

## 5.2 実験条件

### 5.2.1 共通部分

探索点数を  $m = 30$  とする。初期解は実行可能領域として、Function 1 では  $[-5, 5]^2$  内に、Shekel Function では  $[0, 10]^2$  内に、ランダムに与える。最大世代数は Function 1 では



$G_{\max} = 200$ , Shekel Function では  $G_{\max} = 800$  とする。各手法のパラメータ設定ごとに、50 試行する。後述するが、各手法は 25 通りのパラメータ設定を与えるので、手法ごとに、優良解集合探索問題数×パラメータ設定数×試行回数の計 22500 回実験を行う（評価回数は、22500 に、それぞれの最大世代数×探索点数を掛けたものになるので、Function 1 では 135000000 回、Shekel Function では、540000000 回となる）。各試行ごとに初期解を変化させる。厳密な優良解の獲得は困難であるため、優良解の獲得条件となる距離を定める。距離関数として、各優良解  $y \in S$  と探索点  $x$  のユークリッド距離を次元  $N$  で正規化した関数

$$d(x, \delta, \varepsilon) = \frac{\|x - y \in S\|}{\sqrt{N}}$$

を用いる。 $d(x, \delta, \varepsilon)$  が 0.1 以下となったときに、その探索点は、最も近い優良解を獲得できたものとする。実験結果として、各問題において各手法が、定義された優良解を獲得できた割合について、50 試行を通した、平均値、最良値、最悪値、標準偏差を示す。

### 5.2.2 DE への適用について

$fit(x)$  に基づく進化型優良解集合探索手法: DE-4S/rand/1/bin と、一般に知られる DE/rand/1/bin のそれぞれで、先の優良解集合探索問題を解くにあたり、その条件を以下に述べる。スケールリングファクタ  $F = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$ , 交叉確率  $CR = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$  とし、計 25 通りのパラメータ設定を与える。

### 5.2.3 GA への適用について

GA の生存選択を、優良解適合度  $fit(x)$  に基づいたエリート選択とした手法を GA-4S と呼称する。GA-4S と、通常の  $f(x)$  に基づくエリート選択の GA それぞれで先に定義した優良解集合探索問題を解き、得られた優良解の数でその有用性を比較・検証する。それぞれ交叉では Simulated Binary Crossover(SBX), 突然変異に Parameter Based Mutation(PBM) を用いる。交叉率  $p_c = 1$ , 突然変異率  $p_m = 0.5$  とし、分布調整変数はそれぞれ,  $\eta_c, \eta_m = [2, 5, 10, 20, 50]$  の計 25 通りの設定を与える。

## 5.3 実験結果

### 5.3.1 DE への適用結果

#### Function 1 実験結果

表 5.4 : Function1( $\delta = 30$ ,  $\varepsilon = 1$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	50	50	50	50	49	0.2	92	89	91 95 84
	0.4	50	50	49	50	50	0.4	94	99	100 98 99
	0.6	50	49	50	50	50	0.6	97	98	99 100 100
	0.8	50	50	50	50	50	0.8	100	99	100 100 100
	1.0	50	50	50	50	50	1.0	100	99	100 100 100
(b) best. %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	50	50	50	50	50	0.2	100	100	100 100 100
	0.4	50	50	50	50	50	0.4	100	100	100 100 100
	0.6	50	50	50	50	50	0.6	100	100	100 100 100
	0.8	50	50	50	50	50	0.8	100	100	100 100 100
	1.0	50	50	50	50	50	1.0	100	100	100 100 100
(c) worst. %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	50	50	50	0	0	0.2	50	50	50 50 50
	0.4	50	50	50	50	50	0.4	50	50	100 50 50
	0.6	50	0	50	50	50	0.6	50	50	50 100 100
	0.8	50	50	50	50	50	0.8	100	50	100 100 100
	1.0	50	50	50	50	50	1.0	100	50	100 100 100
(d) S.D. .%										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	0	0	0	7.07	7.07	0.2	18.5	20.9	19.4 15.2 23.6
	0.4	0	0	0	0	0	0.4	16.4	7.07	0 9.90 7.07
	0.6	0	7.07	0	0	0	0.6	12.0	9.90	7.07 0 0
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	0	7.07	0 0 0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	0	7.07	0 0 0

表 5.5 : Function1( $\delta = 70$ ,  $\varepsilon = 1$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	25	25	25	25	24.5	0.2	91.5	95.5	97.5 97.5 99
	0.4	25	25	25	25	24.5	0.4	89	96.5	97.5 99 99.5
	0.6	25	25	25	25	25	0.6	96	99.5	99 99.5 99
	0.8	25	25	25	25	25	0.8	97	99	99 100 100
	1.0	25	25	25	25	25	1.0	95	99	99 100 100
(b) best. %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	25	25	25	25	25	0.2	100	100	100 100 100
	0.4	25	25	25	25	25	0.4	100	100	100 100 100
	0.6	25	25	25	25	25	0.6	100	100	100 100 100
	0.8	25	25	25	25	25	0.8	100	100	100 100 100
	1.0	25	25	25	25	25	1.0	100	100	100 100 100
(c) worst. %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	25	25	25	25	0	0.2	50	50	75 75 75
	0.4	25	25	25	25	0	0.4	50	75	75 75 75
	0.6	25	25	25	25	25	0.6	50	75	75 75 75
	0.8	25	25	25	25	25	0.8	50	75	75 100 100
	1.0	25	25	25	25	25	1.0	75	75	75 100 100
(d) S.D. . %										
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin				
	CR						CR			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8 1.0
F	0.2	0	0	0	0	3.54	0.2	13.9	12.1	7.58 7.58 4.95
	0.4	0	0	0	0	3.54	0.4	16.0	8.76	7.58 4.95 3.54
	0.6	0	0	0	0	0	0.6	10.6	3.54	4.95 3.54 4.95
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	9.64	4.95	4.95 0 0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	10.1	4.95	4.95 0 0

表 5.6 : Function1( $\delta = 100$ ,  $\varepsilon = 1$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	16.7	16.7	16.7	16.7	0.2	98.7	99.7	99.7	99.3	99.7
	0.4	16.7	16.7	16.7	16.7	0.4	99.0	98.7	98.7	98	98.3
	0.6	16.7	16.7	16.7	16.7	0.6	98.7	99.0	98.3	98.3	96.7
	0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	99.0	99.3	99.3	99.7	99.3
	1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	1.0	98.3	100	100	99.3	100
(b) best. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	16.7	16.7	16.7	16.7	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	16.7	16.7	16.7	16.7	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	16.7	16.7	16.7	16.7	0.6	100	100	100	100	100
	0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	16.7	16.7	16.7	16.7	0.2	83.3	83.3	83.3	83.3	83.3
	0.4	16.7	16.7	16.7	16.7	0.4	83.3	83.3	83.3	83.3	66.7
	0.6	16.7	16.7	16.7	16.7	0.6	66.7	83.3	83.3	66.7	83.3
	0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	83.3	83.3	83.3	83.3	83.3
	1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	1.0	83.3	100	100	83.3	100
(d) S.D. . %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	0	0	0	0	0.2	4.57	2.36	2.36	3.30	2.36
	0.4	0	0	0	0	0.4	4.00	4.57	4.57	5.47	6.07
	0.6	0	0	0	0	0.6	5.67	4.00	5.05	6.07	6.73
	0.8	0	0	0	0	0.8	4.00	4.00	3.30	2.36	3.30
	1.0	0	0	0	0	1.0	5.05	0	0	3.30	0

表 5.7 : Function1( $\delta = 30$ ,  $\varepsilon = 2$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	96	96	92	88	86	0.2	86	82	78	86	90
	0.4	98	98	100	94	98	0.4	92	94	98	96	96
	0.6	100	100	100	100	100	0.6	92	96	96	100	100
	0.8	100	100	100	100	100	0.8	96	100	100	100	100
	1.0	100	100	100	100	100	1.0	100	100	100	100	100
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	100	100	100	100	100	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	100	100	100	100	100	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	100	100	100	100	100	0.6	100	100	100	100	100
	0.8	100	100	100	100	100	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	100	100	100	100	100	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0
	0.4	0	0	100	0	0	0.4	0	0	0	0	0
	0.6	100	100	100	100	100	0.6	0	0	0	100	100
	0.8	100	100	100	100	100	0.8	0	100	100	100	100
	1.0	100	100	100	100	100	1.0	100	100	100	100	100
(d) S.D. . %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	19.8	19.8	27.4	32.8	35.1	0.2	35.1	38.8	41.8	35.1	30.3
	0.4	14.1	14.1	0	24.0	14.1	0.4	27.4	24.0	14.1	19.8	19.8
	0.6	0	0	0	0	0	0.6	27.4	19.8	19.8	0	0
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	19.8	0	0	0	0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	0	0	0	0	0

表 5.8 : Function1( $\delta = 70$ ,  $\varepsilon = 2$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	33.3	30	32	30.7	30.7	0.2	84.7	88.7	89.3	92	78.7
	0.4	32	33.3	33.3	33.3	33.3	0.4	88	89.3	93.3	90.7	92.7
	0.6	33.3	33.3	32.7	33.3	32.7	F 0.6	90	94.7	97.3	96	98
	0.8	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	94	96	97.3	96	99.3
	1.0	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	1.0	93.3	92.7	96.7	99.3	100
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	F 0.6	100	100	100	100	100
	0.8	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	33.3	0	0	0	0	0.2	33.3	33.3	66.7	66.7	0
	0.4	0	33.3	33.3	33.3	33.3	0.4	66.7	66.7	33.3	33.3	66.7
	0.6	33.3	33.3	0	33.3	0	F 0.6	33.3	33.3	66.7	33.3	66.7
	0.8	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7
	1.0	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	1.0	66.7	66.7	66.7	66.7	100
(d) S.D. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	10.1	6.60	9.13	9.13	0.2	19.3	17.3	15.7	14.4	25.0
	0.4	6.60	0	0	0	0	0.4	16.2	15.7	15.1	16.6	13.9
	0.6	0	0	4.71	0	4.71	F 0.6	19.3	14.1	9.13	12.8	8.00
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	12.9	10.9	9.13	10.9	4.71
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	13.5	13.9	10.1	4.71	0

表 5.9 : Function1( $\delta = 100$ ,  $\varepsilon = 2$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	19.6	19.6	19.2	18.8	17.2	0.2	99.2	99.2	99.2	96	86.4
	0.4	20	18.8	19.6	19.6	20	0.4	99.2	98.4	97.6	96.8	94.4
	0.6	19.2	20	20	20	20	F 0.6	97.6	97.6	98.4	97.6	98.0
	0.8	20	20	20	20	20	0.8	99.2	100	100	100	100
	1.0	20	20	20	20	20	1.0	98.4	98.0	98.0	98.4	100
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	20	20	20	20	20	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	20	20	20	20	20	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	20	20	20	20	20	F 0.6	100	100	100	100	100
	0.8	20	20	20	20	20	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	20	20	20	20	20	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	80	80	80	80	60
	0.4	20	0	0	0	20	0.4	80	80	80	60	60
	0.6	0	20	20	20	20	F 0.6	80	80	80	80	80
	0.8	20	20	20	20	20	0.8	80	100	100	100	100
	1.0	20	20	20	20	20	1.0	80	80	80	80	100
(d) S.D. .%												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	2.83	2.83	3.96	4.80	7.01	0.2	3.96	3.96	3.96	8.08	12.4
	0.4	0	4.80	2.83	2.83	0	0.4	3.96	5.48	6.57	8.44	9.93
	0.6	3.96	0	0	0	0	F 0.6	6.57	6.57	5.48	6.57	6.06
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	3.96	0	0	0	0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	5.48	6.06	6.06	5.48	0

表 5.10 : Function1( $\delta = 30$ ,  $\varepsilon = 3$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	92	92	94	92	84	0.2	82	94	86	78	78
	0.4	100	96	98	100	100	0.4	90	92	88	92	96
	0.6	100	100	100	100	100	0.6	96	100	96	100	100
	0.8	100	100	100	100	100	0.8	94	100	100	100	100
	1.0	100	100	100	100	100	1.0	94	100	100	100	100
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	100	100	100	100	100	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	100	100	100	100	100	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	100	100	100	100	100	0.6	100	100	100	100	100
	0.8	100	100	100	100	100	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	100	100	100	100	100	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0
	0.4	100	0	0	100	100	0.4	0	0	0	0	0
	0.6	100	100	100	100	100	0.6	0	100	0	100	100
	0.8	100	100	100	100	100	0.8	0	100	100	100	100
	1.0	100	100	100	100	100	1.0	0	100	100	100	100
(d) S.D. . %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	27.40	27.40	24.0	27.40	37.0	0.2	38.8	24.0	35.1	41.8	41.8
	0.4	0	19.8	14.1	0	0	0.4	30.3	27.40	32.8	27.40	19.8
	0.6	0	0	0	0	0	0.6	19.8	0	19.8	0	0
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	24.0	0	0	0	0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	24.0	0	0	0	0



表 5.11 : Function1( $\delta = 70$ ,  $\varepsilon = 3$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	49	50	46	48	42	0.2	80	90	83	84	83
	0.4	49	49	49	49	49	0.4	85	90	87	93	86
	0.6	50	50	50	50	50	0.6	89	91	96	99	99
	0.8	50	50	50	50	50	0.8	87	91	94	98	100
	1.0	50	50	50	50	50	1.0	86	98	98	99	100
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	50	50	50	50	50	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	50	50	50	50	50	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	50	50	50	50	50	0.6	100	100	100	100	100
	0.8	50	50	50	50	50	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	50	50	50	50	50	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	50	0	0	0	0.2	0	50	0	0	50
	0.4	0	0	0	0	0	0.4	0	0	0	50	0
	0.6	50	50	50	50	50	0.6	0	0	50	50	50
	0.8	50	50	50	50	50	0.8	50	50	50	50	100
	1.0	50	50	50	50	50	1.0	50	50	50	50	100
(d) S.D. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	7.07	0	13.7	9.90	18.5	0.2	28.6	20.2	26.0	25.6	23.9
	0.4	7.07	7.07	7.07	7.07	7.07	0.4	27.2	22.6	24.3	17.5	24.8
	0.6	0	0	0	0	0	0.6	23.2	21.9	13.7	7.07	7.07
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	22.2	19.4	16.4	9.90	0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	22.7	9.90	9.90	7.07	0

表 5.12 : Function1( $\delta = 100$ ,  $\varepsilon = 3$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の  
優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	23.5	23	24	22	21.5	0.2	97	96.5	95.5	94.5	83
	0.4	24.5	25	24	25	25	0.4	94.5	92	92	92	90.5
	0.6	24.5	25	25	25	25	F 0.6	95.5	98	95.5	96	96.5
	0.8	25	25	25	25	25	0.8	99.5	99	100	100	100
	1.0	25	25	25	25	25	1.0	92.5	95.5	94.5	96.5	99

(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	25	25	25	25	25	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	25	25	25	25	25	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	25	25	25	25	25	F 0.6	100	100	100	100	100
	0.8	25	25	25	25	25	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	25	25	25	25	25	1.0	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	75	50	75	50	25
	0.4	0	25	0	25	25	0.4	75	75	75	75	50
	0.6	0	25	25	25	25	F 0.6	75	75	75	75	75
	0.8	25	25	25	25	25	0.8	75	75	100	100	100
	1.0	25	25	25	25	25	1.0	75	75	75	75	75

(d) S.D. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	6.00	6.85	4.95	8.21	8.76	0.2	8.21	10.1	9.70	11.6	17.8
	0.4	3.54	0	4.95	0	0	0.4	10.5	11.8	11.8	11.8	14.2
	0.6	3.54	0	0	0	0	F 0.6	9.70	6.85	9.70	9.26	8.76
	0.8	0	0	0	0	0	0.8	3.54	4.95	0	0	0
	1.0	0	0	0	0	0	1.0	11.6	9.70	10.5	8.76	4.95

## Shekel Function 実験結果

表 5.13 : Shekel Function( $\delta = 6$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2	25	16.7	16.3	16.3	6.67	2	16	16.7	18.3	17.3	19.7
5	28.3	16.7	16.7	16.3	14.7	5	16.7	17	16.3	19.0	19.7
F 10	33.3	16.7	16.3	16.7	16.7	F 10	16.7	16.7	17.3	20	23
20	39.3	16.7	16.7	16.7	16.7	20	17.3	17	19.0	24	33
50	44.7	16.7	16.7	16.7	16.3	50	17.3	18.7	20	32	44.7
(b) best. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	0.2	16.7	16.7	50	50	33.3
0.4	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	0.4	16.7	33.3	16.7	50	50
F 0.6	83.3	16.7	16.7	16.7	16.7	F 0.6	16.7	33.3	33.3	50	50
0.8	83.3	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	33.3	33.3	50	50	50
1.0	100	16.7	16.7	16.7	16.7	1.0	33.3	50	50	83.3	66.7
(c) worst. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	0	16.7	0	0	0	0.2	0	16.7	16.7	0	0
0.4	16.7	16.7	16.7	0	0	0.4	16.7	16.7	0	16.7	16.7
F 0.6	16.7	16.7	0	16.7	16.7	F 0.6	16.7	0	16.7	0	16.7
0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7
1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	0	1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7
(d) S.D. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	14.2	0	2.36	2.36	8.25	0.2	3.30	0	6.07	5.79	7.3
0.4	15.5	0	0	2.36	5.47	0.4	0	2.36	2.36	6.74	7.3
F 0.6	17.5	0	2.36	0	0	F 0.6	0	3.37	3.30	10.6	12.5
0.8	19.3	0	0	0	0	0.8	3.30	2.36	8.25	13.5	16.7
1.0	21.9	0	0	0	2.36	1.0	3.30	6.42	7.53	16.8	16.3

表 5.14 : Shekel Function( $\delta = 8$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	17.5	12.3	12.5	12	5.50	0.2	27.8	29.0	32.8	34.3 36.8
	0.4	20.3	12.3	12.5	12.5	11.3	0.4	28.3	29.3	34.3	43.5 47.3
	0.6	30	12.5	12.5	12.5	12.5	0.6	29.0	28.3	33.3	41.5 54.8
	0.8	29.3	12.5	12.5	12.5	12.5	0.8	31	32.8	40.5	46.8 55.5
	1.0	32.8	12.5	12.5	12.5	12	1.0	27.5	30.8	42	40.8 40.3
(b) best. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	37.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.2	50	50	87.5	75 75
	0.4	62.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.4	62.5	50	62.5	87.5 87.5
	0.6	62.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.6	50	62.5	62.5	75 100
	0.8	75	12.5	12.5	12.5	12.5	0.8	50	87.5	75	87.5 87.5
	1.0	75	12.5	12.5	12.5	12.5	1.0	50	62.5	87.5	75 50
(c) worst. %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	12.5	0	12.5	0	0	0.2	12.5	12.5	12.5	12.5 12.5
	0.4	12.5	0	12.5	12.5	0	0.4	12.5	12.5	25	25 25
	0.6	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.6	25	12.5	25	25 25
	0.8	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.8	25	25	25	25 25
	1.0	12.5	12.5	12.5	12.5	0	1.0	12.5	25	25	25 12.5
(d) S.D. . %											
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin					
	CR						CR				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
F	0.2	7.99	1.77	0	2.47	6.27	0.2	7.70	8.16	13.1	11.5 17.9
	0.4	11.8	1.77	0	0	3.79	0.4	9.04	8.60	11.5	15.2 15.0
	0.6	16.0	0	0	0	0	0.6	6.89	8.30	11.2	16.6 17.5
	0.8	15.1	0	0	0	0	0.8	8.47	13.8	17.4	17.8 15.8
	1.0	16.3	0	0	0	2.47	1.0	7.14	9.85	18.2	13.8 9.87

表 5.15 : Shekel Function( $\delta = 12$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	14.6	10	10	10	4.80	0.2	29	30.8	33.8	40.2	46.6
	0.4	18	9.80	10	10	9.40	0.4	28.4	30.4	32.2	37.4	47.6
	0.6	22.4	10	10	10	10	F 0.6	31.4	26	30.6	39	50.4
	0.8	25.6	10	10	10	10	0.8	27.4	27.6	34.8	39	45
	1.0	28.2	10	10	10	10	1.0	30.8	30.8	30.6	32	32.4

(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	40	10	10	10	10	0.2	50	60	60	60	70
	0.4	50	10	10	10	10	0.4	60	60	50	70	80
	0.6	50	10	10	10	10	F 0.6	60	50	60	70	70
	0.8	60	10	10	10	10	0.8	50	70	70	70	70
	1.0	60	10	10	10	10	1.0	60	70	60	50	40

(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	10	10	10	10	0	0.2	10	20	20	20	20
	0.4	10	0	10	10	0	0.4	20	20	20	20	20
	0.6	10	10	10	10	10	F 0.6	20	20	20	20	20
	0.8	10	10	10	10	10	0.8	20	20	20	20	20
	1.0	10	10	10	10	10	1.0	20	20	20	20	20

(d) S.D. . %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	8.13	0	0	0	5.05	0.2	9.31	10.1	11.0	11.5	12.9
	0.4	10.1	1.41	0	0	2.40	0.4	9.97	10.5	10.4	12.3	15.2
	0.6	11.7	0	0	0	0	F 0.6	11.3	7.82	12.0	15.3	15.0
	0.8	15.3	0	0	0	0	0.8	9.22	10.6	15.3	14.7	14.5
	1.0	14.1	0	0	0	0	1.0	9.86	12.9	12.2	11.1	8.47

表 5.16 : Shekel Function( $\delta = 6$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	16.3	11.8	10.5	9.25	2.50	0.2	12.5	12.8	14.8	14.3	19.3
	0.4	17.5	12.5	11.8	11.5	11	0.4	12.8	13	18.3	18.3	17.5
	0.6	20.5	12.5	12.5	12.3	12.5	0.6	13	14.3	22.3	19.8	27
	0.8	20.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.8	14.8	15.5	28.0	30.5	32
	1.0	27.8	12.5	12.5	12.5	12.5	1.0	15.8	24.3	30.5	29.3	17.5
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	50	12.5	12.5	12.5	12.5	0.2	12.5	25	37.5	25	50
	0.4	50	12.5	12.5	12.5	12.5	0.4	25	25	50	37.5	37.5
	0.6	50	12.5	12.5	12.5	12.5	0.6	25	37.5	50	37.5	62.5
	0.8	50	12.5	12.5	12.5	12.5	0.8	37.5	37.5	62.5	50	50
	1.0	62.5	12.5	12.5	12.5	12.5	1.0	37.5	37.5	50	50	37.5
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	12.5	0	0	0	0	0.2	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
	0.4	12.5	12.5	0	0	0	0.4	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
	0.6	12.5	12.5	12.5	0	12.5	0.6	12.5	12.5	12.5	0	0
	0.8	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	0.8	12.5	12.5	0	0	0
	1.0	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	1.0	12.5	12.5	0	0	0
(d) S.D. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	8.09	3.00	4.63	5.54	5.05	0.2	0	1.77	5.47	4.38	9.85
	0.4	8.34	0	3.00	3.43	4.10	0.4	1.77	2.47	9.85	8.07	8.38
	0.6	10.33	0	0	1.77	0	0.6	2.47	5.65	11.4	10.7	13.9
	0.8	10.0	0	0	0	0	0.8	5.47	6.47	14.0	13.2	11.6
	1.0	15.6	0	0	0	0	1.0	7.06	10.5	11.3	12.5	13.1

表 5.17 : Shekel Function( $\delta = 8$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	21	14.3	16.3	12.7	5	0.2	44	53.3	59.3	69.3	66
	0.4	22.7	16.3	16	16	14.3	0.4	46.7	52	58.7	58	68
	0.6	28	16.7	16.7	16.7	16.3	F 0.6	45.3	65.3	61.7	44.3	52.7
	0.8	30.3	16.7	16.7	16.7	16.3	0.8	58.7	76.7	52.3	40	42.3
	1.0	34	16.7	16.7	16.7	16	1.0	68.3	82.7	51.3	34.7	24
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	50	16.7	16.7	16.7	16.7	0.2	83.3	100	100	100	100
	0.4	50	16.7	16.7	16.7	16.7	0.4	83.3	83.3	100	100	100
	0.6	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	F 0.6	83.3	100	100	83.3	100
	0.8	83.3	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	1.0	100	100	100	100	66.7
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	16.7	0	0	0	0	0.2	16.7	16.7	33.3	33.3	16.7
	0.4	16.7	0	0	0	0	0.4	16.7	16.7	16.7	16.7	33.3
	0.6	16.7	16.7	16.7	16.7	0	F 0.6	16.7	33.3	16.7	0	0
	0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	0	0.8	33.3	33.3	0	0	0
	1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	0	1.0	16.7	50	0	0	0
(d) S.D. . %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	9.41	5.84	2.36	7.19	7.72	0.2	13.8	19.9	16.2	15.6	16.1
	0.4	9.38	2.36	3.30	3.30	5.84	0.4	16.5	18.0	19.7	19.4	15.4
	0.6	14.5	0	0	0	2.36	F 0.6	13.1	20.4	21.1	19.2	22.7
	0.8	15.7	0	0	0	2.36	0.8	19.1	19.3	26.7	21.0	24.1
	1.0	14.7	0	0	0	3.30	1.0	15.5	12.6	25.8	23.5	16.9

表 5.18 : Shekel Function( $\delta = 12$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	20	15	13.7	13.7	5	0.2	59.7	61.7	67.0	73.7	77.3
	0.4	25.3	16.7	16.3	16	13.3	0.4	61.7	60.3	60.3	54	67.0
	0.6	26.3	16.7	16.7	16.7	16.3	F 0.6	64.3	64.3	51	40.3	41.7
	0.8	29	16.7	16.7	16.7	16.3	0.8	72.7	70	49.6	34	44.7
	1.0	33.7	16.7	16.7	16.7	16.3	1.0	80.7	77.7	44	29	26
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	0.2	83.3	83.3	100	100	100
	0.4	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	0.4	83.3	83.3	100	83.3	100
	0.6	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	F 0.6	100	100	100	100	83.3
	0.8	66.7	16.7	16.7	16.7	16.7	0.8	100	100	83.3	66.7	83.3
	1.0	83.3	16.7	16.7	16.7	16.7	1.0	100	100	83.3	83.3	83.3
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	50	33.3	50	50	50
	0.4	16.7	16.7	0	0	0	0.4	33.3	33.3	33.3	16.7	33.3
	0.6	16.7	16.7	16.7	16.7	0	F 0.6	50	33.3	16.7	16.7	16.7
	0.8	16.7	16.7	16.7	16.7	0	0.8	50	33.3	16.7	0	0
	1.0	16.7	16.7	16.7	16.7	0	1.0	50	50	0	0	0
(d) S.D. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	10.6	5.05	6.47	6.47	7.72	0.2	10.2	13.6	13.7	15.5	13.4
	0.4	11.8	0	2.36	3.30	6.73	0.4	10.8	10.0	15.0	18.3	13.3
	0.6	12.2	0	0	0	2.36	F 0.6	12.2	16.2	17.3	18.8	19.4
	0.8	15.4	0	0	0	2.36	0.8	14.6	15.4	16.7	21.0	21.2
	1.0	18.9	0	0	0	2.36	1.0	15.9	14.9	21.5	20.2	18.2



表 5.19 : Shekel Function( $\delta = 6$ ,  $\varepsilon = 1.2$ )における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	32.0	28.7	24.0	22.0	6.7	0.2	34.7	47.3	56.7	62.7	57.3
	0.4	35.3	32.7	31.3	28.7	30.7	0.4	42.0	50.0	61.3	58.0	54.7
	0.6	35.3	33.3	33.3	32.7	32.0	F 0.6	44.0	58.0	57.3	44.0	56.0
	0.8	44.0	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	56.0	73.3	63.3	37.3	33.3
	1.0	53.3	33.3	33.3	33.3	31.3	1.0	64.7	81.3	55.3	31.3	14.0
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	66.7	33.3	33.3	33.3	33.3	0.2	66.7	100	100	100	100
	0.4	66.7	33.3	33.3	33.3	33.3	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	66.7	33.3	33.3	33.3	33.3	F 0.6	100	100	100	100	100
	0.8	100	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	100	33.3	33.3	33.3	33.3	1.0	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	33.3	0	33.3	33.3	0
	0.4	33.3	0	0	0	0	0.4	33.3	33.3	0	0	0
	0.6	0	33.3	33.3	0	0	F 0.6	33.3	0	0	0	0
	0.8	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	33.3	0	0	0	0
	1.0	33.3	33.3	33.3	33.3	0	1.0	33.3	33.3	0	0	0
(d) S.D. . %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	11.6	11.7	15.1	16.0	13.5	0.2	6.60	22.4	24.5	24.9	30.2
	0.4	8.00	4.71	8.00	11.7	9.13	0.4	18.8	20.5	29.6	26.8	29.9
	0.6	10.5	0	0	4.71	6.60	F 0.6	19.6	28.4	38.7	43.4	40.7
	0.8	20.7	0	0	0	0	0.8	24.7	27.8	38.8	40.2	42.6
	1.0	22.3	0	0	0	8.00	1.0	29.7	25.3	42.9	41.7	22.4

表 5.20 : Shekel Function( $\delta = 8$ ,  $\varepsilon = 1.2$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	32.7	26.7	26.7	21.3	9.33	0.2	48.7	64.0	68.0	76.0	65.3
	0.4	34.7	32.7	32.0	30.7	24.7	0.4	64.7	75.3	50.7	35.3	25.3
	0.6	36.0	33.3	32.7	32.7	33.3	0.6	81.3	76.7	38.7	23.3	25.3
	0.8	43.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	94.0	76.7	42.0	16.7	20.0
	1.0	58.0	33.3	33.3	33.3	32.0	1.0	94.7	73.3	27.3	16.7	12.7
(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	66.7	33.3	33.3	33.3	33.3	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	66.7	33.3	33.3	33.3	33.3	0.4	100	100	100	100	100
	0.6	66.7	33.3	33.3	33.3	33.3	0.6	100	100	100	100	100
	0.8	100	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	100	100	100	100	100
	1.0	100	33.3	33.3	33.3	33.3	1.0	100	100	100	66.7	100
(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	33.3	33.3	0	0	33.3
	0.4	0	0	0	0	0	0.4	33.3	33.3	0	0	0
	0.6	33.3	33.3	0	0	33.3	0.6	33.3	0	0	0	0
	0.8	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	0.8	66.7	0	0	0	0
	1.0	33.3	33.3	33.3	33.3	0	1.0	66.7	0	0	0	0
(d) S.D. . %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	10.6	13.5	13.5	16.2	15.1	0.2	21.5	20.0	23.3	25.2	26.9
	0.4	9.43	4.71	6.60	9.13	14.8	0.4	23.7	24.1	30.3	33.3	26.6
	0.6	9.13	0	4.71	4.71	0	0.6	22.5	27.2	32.6	28.8	29.8
	0.8	20.5	0	0	0	0	0.8	12.9	28.8	33.5	24.5	24.3
	1.0	25.9	0	0	0	6.60	1.0	12.3	30.9	30.6	20.5	23.2

表 5.21 : Shekel Function( $\delta = 12$ ,  $\varepsilon = 1.2$ ) における DE/rand/1/bin および DE-4S/rand/1/bin の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	19.6	16.4	16.4	12.4	6.00	0.2	38.0	49.2	59.6	72.4	84.0
	0.4	23.2	19.2	20.0	18.0	16.0	0.4	49.2	47.2	30.0	22.4	30.0
	0.6	22.0	20.0	20.0	19.6	19.6	F 0.6	61.6	42.4	32.4	16.8	21.2
	0.8	25.2	19.6	20.0	19.6	19.6	0.8	73.2	55.6	28.0	15.2	15.6
	1.0	35.6	20.0	20.0	20.0	19.6	1.0	80.4	62.0	29.6	14.8	14.0

(b) best. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	20	20	20	20	20	0.2	100	100	100	100	100
	0.4	60	20	20	20	20	0.4	80	80	60	60	80
	0.6	40	20	20	20	20	F 0.6	100	80	80	80	40
	0.8	60	20	20	20	20	0.8	100	100	60	60	40
	1.0	60	20	20	20	20	1.0	100	100	60	80	60

(c) worst. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	0	0	0	0	0	0.2	20	20	20	40	40
	0.4	20	0	20	0	0	0.4	20	20	0	0	0
	0.6	20	20	20	0	0	F 0.6	20	0	0	0	0
	0.8	20	0	20	0	0	0.8	40	20	0	0	0
	1.0	20	20	20	20	0	1.0	40	0	0	0	0

(d) S.D. %												
DE/rand/1/bin						DE-4S/rand/1/bin						
	CR						CR					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
F	0.2	2.83	7.76	7.76	9.81	9.26	0.2	18.2	21.1	20.0	16.1	16.7
	0.4	8.44	3.96	0	6.06	8.08	0.4	17.2	18.4	13.6	18.4	22.6
	0.6	6.06	0	0	2.83	2.83	F 0.6	18.0	20.1	19.8	17.8	14.2
	0.8	9.74	2.83	0	2.83	2.83	0.8	18.3	19.5	19.8	16.4	14.2
	1.0	13.0	0	0	0	2.83	1.0	16.9	22.6	22.9	18.9	16.8

## 5.3.2 GA への適用結果

## Function 1 実験結果

表 5.22 : Function1( $\delta = 30$ ,  $\varepsilon = 1$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	50	50	50	49	48	2	100	100	100	100	98
	5	50	50	50	49	48	5	100	100	100	100	97
	10	50	51	51	47	48	10	100	100	100	100	96
	20	50	50	48	50	50	20	100	100	100	100	94
	50	50	50	49	50	46	50	100	100	100	100	93
(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	50	50	50	50	50	2	100	100	100	100	100
	5	50	50	50	50	50	5	100	100	100	100	100
	10	50	100	100	50	50	10	100	100	100	100	100
	20	50	50	50	50	50	20	100	100	100	100	100
	50	50	50	50	50	50	50	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	50	50	50	0	0	2	100	100	100	100	50
	5	50	50	50	0	0	5	100	100	100	100	0
	10	50	50	50	0	0	10	100	100	100	100	50
	20	50	50	0	50	50	20	100	100	100	100	50
	50	50	50	0	50	0	50	100	100	100	100	50
(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	7.07	9.90	2	0	0	0	0	9.90
	5	0	0	0	7.07	9.90	5	0	0	0	0	15.7
	10	0	7.07	7.07	12.0	9.90	10	0	0	0	0	13.7
	20	0	0	9.90	0	0	20	0	0	0	0	16.4
	50	0	0	7.07	0	13.7	50	0	0	0	0	17.5

表 5.23 : Function1( $\delta = 70$ ,  $\varepsilon = 1$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	25	25.5	25	25.5	25.5	2	99	97	97	96	96.5
	5	25	25	25	25	25	5	98	96.5	93.5	94	94
	10	25	25	25	25	25.5	10	98.5	98	97	93.5	88
	20	25	25	25	25	25	20	98.5	97.5	93	91	91
	50	25.5	25	25	25	25	50	98	97	96	92	89.5

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	25	50	25	50	50	2	100	100	100	100	100
	5	25	25	25	25	25	5	100	100	100	100	100
	10	25	25	25	25	50	10	100	100	100	100	100
	20	25	25	25	25	25	20	100	100	100	100	100
	50	50	25	25	25	25	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	25	25	25	25	25	2	75	75	50	50	50
	5	25	25	25	25	25	5	75	50	50	75	50
	10	25	25	25	25	25	10	50	75	75	75	50
	20	25	25	25	25	25	20	75	75	50	50	50
	50	25	25	25	25	25	50	75	50	50	50	50

(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	3.54	0	3.54	3.54	2	4.95	8.21	9.64	10.5	10.1
	5	0	0	0	0	0	5	6.85	10.1	14.1	10.8	11.9
	10	0	0	0	0	3.54	10	7.84	6.85	8.21	11.1	14.5
	20	0	0	0	0	0	20	6.00	7.58	14.3	14.1	13.1
	50	3.54	0	0	0	0	50	6.85	9.64	10.5	12.8	15.2

表 5.24 : Function1( $\delta = 100$ ,  $\varepsilon = 1$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	16.7	16.7	16.7	16.7	2	99.7	100	100	100	99.7
	5	17	16.7	16.7	16.7	5	100	100	100	98.7	99.3
	10	17	17	16.7	16.7	$\eta_c$ 10	100	100	100	99.7	98
	20	17	16.7	16.7	16.7	20	100	100	99.7	98	98.7
	50	17	16.7	16.7	16.7	50	100	99.3	99	98	98.3

(b) best. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	16.7	16.7	16.7	16.7	2	100	100	100	100	100
	5	33.3	16.7	16.7	16.7	5	100	100	100	100	100
	10	33.3	33.3	16.7	16.7	$\eta_c$ 10	100	100	100	100	100
	20	33.3	16.7	16.7	16.7	20	100	100	100	100	100
	50	33.3	16.7	16.7	16.7	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	16.7	16.7	16.7	16.7	2	83.3	100	100	100	83.3
	5	16.7	16.7	16.7	16.7	5	100	100	100	83.3	83.3
	10	16.7	16.7	16.7	16.7	$\eta_c$ 10	100	100	100	83.3	66.7
	20	16.7	16.7	16.7	16.7	20	100	100	83.3	83.3	83.3
	50	16.7	16.7	16.7	16.7	50	100	83.3	83.3	66.7	83.3

(d) S.D. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	0	0	0	0	2	2.36	0	0	0	2.36
	5	2.36	0	0	0	5	0	0	0	4.57	3.30
	10	2.36	2.36	0	0	$\eta_c$ 10	0	0	0	2.36	6.42
	20	2.36	0	0	0	20	0	0	2.36	5.47	4.57
	50	2.36	0	0	0	50	0	3.30	4.00	6.42	5.05

表 5.25 : Function1( $\delta = 30$ ,  $\varepsilon = 2$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	90	98	98	96	92	2	96	100	100	98	96
	5	86	98	96	96	84	5	100	100	98	100	90
	10	96	98	100	98	78	10	90	100	100	98	80
	20	94	98	92	94	74	20	88	100	100	100	84
	50	98	100	98	100	86	50	90	100	100	100	90
(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	100	100	100	100	100	2	100	100	100	100	100
	5	100	100	100	100	100	5	100	100	100	100	100
	10	100	100	100	100	100	10	100	100	100	100	100
	20	100	100	100	100	100	20	100	100	100	100	100
	50	100	100	100	100	100	50	100	100	100	100	100
(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	0	100	100	0	0
	5	0	0	0	0	0	5	100	100	0	100	0
	10	0	0	100	0	0	10	0	100	100	0	0
	20	0	0	0	0	0	20	0	100	100	100	0
	50	0	100	0	100	0	50	0	100	100	100	0
(d) S.D. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	30.3	14.1	14.1	19.8	27.4	2	19.8	0	0	14.1	19.8
	5	35.1	14.1	19.8	19.8	37.0	5	0	0	14.1	0	30.3
	10	19.8	14.1	0	14.1	41.8	10	30.3	0	0	14.1	40.4
	20	24.0	14.1	27.4	24.0	44.3	20	32.8	0	0	0	37.0
	50	14.1	0	14.1	0	35.1	50	30.3	0	0	0	30.3

表 5.26 : Function1( $\delta = 70$ ,  $\varepsilon = 2$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	32	30.7	32.7	33.3	29.3	2	97.3	98	98	94.7	94
	5	30.7	32.7	32.7	32.7	31.3	5	98	98.7	99.3	91.3	88
	10	30	32.7	32.7	33.3	28.7	10	94.7	96	97.3	92.7	85.3
	20	32	30.7	33.3	33.3	30	20	91.3	98.7	95.3	90.7	79.3
	50	32.7	32.7	33.3	33.3	30	50	92.7	96.7	96	90	79.3

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	50	50	50	50	50	2	100	100	100	100	100
	5	50	50	50	50	50	5	100	100	100	100	100
	10	50	50	50	50	50	10	100	100	100	100	100
	20	50	50	50	50	50	20	100	100	100	100	100
	50	50	50	50	50	50	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	33.3	0	2	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7
	5	0	0	0	0	0	5	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7
	10	0	0	0	33.3	0	10	66.7	66.7	66.7	33.3	33.3
	20	0	0	33.3	33.3	0	20	66.7	66.7	66.7	66.7	0
	50	0	0	33.3	33.3	0	50	66.7	66.7	66.7	66.7	33.3

(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	6.60	9.13	4.71	0	10.9	2	9.13	8.00	8.00	12.3	12.9
	5	9.13	4.71	4.71	4.71	8.00	5	8.00	6.60	4.71	14.8	16.2
	10	10.1	4.71	4.71	0	11.7	10	12.3	10.9	9.13	15.5	19.2
	20	6.60	9.13	0	0	10.1	20	14.8	6.60	11.7	15.1	26.0
	50	4.71	4.71	0	0	10.1	50	13.9	10.1	10.9	15.4	21.2



表 5.27 : Function1( $\delta = 100$ ,  $\varepsilon = 2$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	20	19.2	20	19.6	18.4	2	99.2	99.2	100	99.6	98.0
	5	18.4	19.2	20	20	17.6	5	97.6	99.2	99.2	98.8	96.4
	10	18.8	19.2	20	20	17.6	10	98.4	99.6	98.8	98.0	95.6
	20	19.2	18.4	19.6	19.6	18	20	98.0	99.2	98.4	96.4	92.0
	50	18.8	19.6	20	20	16.4	50	98.0	98.8	99.2	96	91.6

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	20	20	20	20	20	2	100	100	100	100	100
	5	20	20	20	20	20	5	100	100	100	100	100
	10	20	20	20	20	20	10	100	100	100	100	100
	20	20	20	20	20	20	20	100	100	100	100	100
	50	20	20	20	20	20	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	20	0	20	0	0	2	80	80	100	80	80
	5	0	0	20	20	0	5	80	80	80	80	80
	10	0	0	20	20	0	10	80	80	80	80	80
	20	0	0	0	0	0	20	80	80	80	80	60
	50	0	0	20	20	0	50	80	80	80	80	80

(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	3.96	0	2.83	5.48	2	3.96	3.96	0	2.83	6.06
	5	5.48	3.96	0	0	6.57	5	6.57	3.96	3.96	4.80	7.76
	10	4.80	3.96	0	0	6.57	10	5.48	2.83	4.80	6.06	8.37
	20	3.96	5.48	2.83	2.83	6.06	20	6.06	3.96	5.48	7.76	10.7
	50	4.80	2.83	0	0	7.76	50	6.06	4.80	3.96	8.08	9.97

表 5.28 : Function1( $\delta = 30$ ,  $\varepsilon = 3$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	98	98	100	98	86	2	92	100	100	96	90
	5	96	98	98	98	82	5	96	98	100	100	94
	10	96	100	94	96	86	10	90	96	100	98	88
	20	90	98	100	98	82	20	92	98	98	100	90
	50	96	96	98	98	76	50	88	100	100	98	82

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	100	100	100	100	100	2	100	100	100	100	100
	5	100	100	100	100	100	5	100	100	100	100	100
	10	100	100	100	100	100	10	100	100	100	100	100
	20	100	100	100	100	100	20	100	100	100	100	100
	50	100	100	100	100	100	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	100	0	0	2	0	100	100	0	0
	5	0	0	0	0	0	5	0	0	100	100	0
	10	0	100	0	0	0	10	0	0	100	0	0
	20	0	0	100	0	0	20	0	0	0	100	0
	50	0	0	0	0	0	50	0	100	100	0	0

(d) S.D. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	14.1	14.1	0	14.1	35.1	2	27.4	0	0	19.8	30.3
	5	19.8	14.1	14.1	14.1	38.8	5	19.8	14.1	0	0	24.0
	10	19.8	0	24.0	19.8	35.1	10	30.3	19.8	0	14.1	32.8
	20	30.3	14.1	0	14.1	38.8	20	27.4	14.1	14.1	0	30.3
	50	19.8	19.8	14.1	14.1	43.1	50	32.8	0	0	14.1	38.8

表 5.29 : Function1( $\delta = 70$ ,  $\varepsilon = 3$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %													
GA						GA-4S							
		$\eta_m$							$\eta_m$				
		2	5	10	20	50			2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	48	49	49	50	45	$\eta_c$	2	99	97	99	99	88
	5	47	49	49	49	45		5	95	97	100	94	91
	10	48	49	49	49	45		10	95	97	99	90	87
	20	45	49	49	50	46		20	93	96	97	96	86
	50	45	48	49	49	46		50	94	94	98	91	81
(b) best. %													
GA						GA-4S							
		$\eta_m$							$\eta_m$				
		2	5	10	20	50			2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	50	50	50	50	50	$\eta_c$	2	100	100	100	100	100
	5	50	50	50	50	50		5	100	100	100	100	100
	10	50	50	50	50	50		10	100	100	100	100	100
	20	50	50	50	50	50		20	100	100	100	100	100
	50	50	50	50	50	50		50	100	100	100	100	100
(c) worst. %													
GA						GA-4S							
		$\eta_m$							$\eta_m$				
		2	5	10	20	50			2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	0	0	0	50	0	$\eta_c$	2	50	50	50	50	0
	5	0	0	0	0	0		5	50	50	100	50	50
	10	0	0	0	0	0		10	50	50	50	0	0
	20	0	0	0	50	0		20	50	50	50	50	50
	50	0	0	0	0	0		50	50	50	50	50	0
(d) S.D. %													
GA						GA-4S							
		$\eta_m$							$\eta_m$				
		2	5	10	20	50			2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	9.90	7.07	7.07	0	15.2	$\eta_c$	2	7.07	12.0	7.07	7.07	23.8
	5	12.0	7.07	7.07	7.07	15.2		5	15.2	12.0	0	16.4	19.4
	10	9.90	7.07	7.07	7.07	15.2		10	15.2	12.0	7.07	22.6	24.3
	20	15.2	7.07	7.07	0	13.7		20	17.5	13.7	12.0	13.7	22.7
	50	15.2	9.90	7.07	7.07	13.7		50	16.4	16.4	9.90	19.4	28.4

表 5.30 : Function1( $\delta = 100$ ,  $\varepsilon = 3$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	23	25	25	25	22	2	96	99	99	99	96.5
	5	23.5	24.5	24.5	25	22.5	5	97	98	97.5	94	93
	10	22	24	25	25	23	10	97	97	97	95	90
	20	23	23	25	25	21	20	95.5	96	95	93.5	89.5
	50	22	24	25	24.5	22	50	94.5	94	97.5	94.5	83.5

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	25	25	25	25	25	2	100	100	100	100	100
	5	25	25	25	25	25	5	100	100	100	100	100
	10	25	25	25	25	25	10	100	100	100	100	100
	20	25	25	25	25	25	20	100	100	100	100	100
	50	25	25	25	25	25	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	25	25	25	0	2	75	75	75	75	75
	5	0	0	0	25	0	5	75	75	75	75	75
	10	0	0	25	25	0	10	75	75	75	75	50
	20	0	0	25	25	0	20	75	75	75	50	50
	50	0	0	25	0	0	50	75	75	75	75	50

(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	6.85	0	0	0	8.21	2	9.26	3.54	3.54	3.54	8.76
	5	6.00	3.54	3.54	0	7.58	5	8.21	6.85	7.58	10.8	11.3
	10	8.21	4.95	0	0	6.85	10	8.21	8.21	8.21	10.1	14.3
	20	6.85	6.85	0	0	9.26	20	9.70	9.26	10.1	12.2	14.4
	50	8.21	3.54	0	3.54	8.21	50	10.5	10.8	7.58	10.5	14.8

## Shekel Function 実験結果

表 5.31 : Shekel Function( $\delta = 6$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	15.7	15.7	14.7	13.7	13.3	2	18.3	17.3	17.3	18	17.6
	5	16	15.3	15.7	14	12.7	5	17	17.3	17.6	17.3	18.3
	10	15.7	14.3	15.3	14	14	10	18.7	17.3	18.3	18.3	19.3
	20	16.3	15.7	15.3	13.7	13.3	20	18	17.6	18	18	18.3
	50	16	15.7	14.3	15	13.3	50	18.3	17.6	17.6	17	18.3
(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	5	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	5	33.3	33.3	33.3	33.3	50
	10	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	10	33.3	33.3	50	33.3	50
	20	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	20	33.3	50	50	33.3	33.3
	50	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	50	33.3	33.3	50	50	50
(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	16.7	16.7	16.7	0	16.7
	5	0	0	0	0	0	5	16.7	16.7	16.7	16.7	0
	10	0	0	0	0	0	10	16.7	16.7	16.7	0	0
	20	0	0	0	0	0	20	16.7	16.7	0	0	0
	50	0	0	0	0	0	50	16.7	16.7	0	0	0
(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	4.00	4.00	5.47	6.47	6.73	2	5.05	3.30	3.30	5.67	4.00
	5	3.30	4.57	4.00	6.17	7.19	5	2.36	3.30	4.00	3.30	7.72
	10	4.00	5.84	4.57	6.17	6.17	10	5.47	3.30	6.07	6.94	8.49
	20	2.36	4.00	4.57	6.47	6.73	20	4.57	5.23	7.41	5.67	6.07
	50	3.30	4.00	5.84	5.05	6.73	50	5.05	4.00	6.22	5.31	7.72

表 5.32 : Shekel Function( $\delta = 8$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	12.5	12.3	12.5	12.5	12.5	2	32.8	33.3	33.8	32.5	32
	5	12.5	12.5	12.5	12.5	12	5	34.5	33	32.3	31	34.3
	10	12.5	12.5	12.5	12.3	12	$\eta_c$ 10	33.3	31.8	33.8	31.5	31.3
	20	12.3	12.5	12.5	12.5	12	20	32	32.5	30.8	32.3	31.3
	50	12.5	12.5	12.5	12.5	12.3	50	30.3	30.5	30.3	30.8	33.5
(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	2	75	62.5	62.5	50	50
	5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	5	62.5	62.5	50	50	50
	10	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	$\eta_c$ 10	62.5	75	62.5	50	50
	20	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	20	62.5	62.5	50	50	50
	50	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	50	62.5	62.5	50	62.5	75
(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	12.5	0	12.5	12.5	12.5	2	12.5	12.5	25	12.5	12.5
	5	12.5	12.5	12.5	12.5	0	5	12.5	25	12.5	12.5	12.5
	10	12.5	12.5	12.5	0	0	$\eta_c$ 10	25	25	25	12.5	12.5
	20	0	12.5	12.5	12.5	0	20	12.5	25	12.5	12.5	25
	50	12.5	12.5	12.5	12.5	0	50	12.5	25	25	12.5	12.5
(d) S.D. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	1.77	0	0	0	2	11.0	9.98	9.53	9.78	8.44
	5	0	0	0	0	2.47	5	10.9	9.02	9.14	8.08	11.0
	10	0	0	0	1.77	2.47	$\eta_c$ 10	10.3	10.5	9.19	9.19	8.84
	20	1.77	0	0	0	2.47	20	9.50	9.45	8.07	9.48	8.09
	50	0	0	0	0	1.77	50	8.41	9.83	8.02	9.18	11.7

表 5.33 : Shekel Function( $\delta = 12$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	10	10	10	10	2	39.6	34.8	35	33.8	34.4
	5	10	10	10	10	5	38	35.4	35.6	33.4	32.6
	10	10	10	10	10	$\eta_c$ 10	37.2	34.6	34.6	33.4	34.6
	20	10	10	10	10	20	36.8	32.8	33	31.2	33.2
	50	10	10	10	10	50	35.4	31.4	34.4	35.4	32.2

(b) best. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	10	10	10	10	2	60	50	60	60	60
	5	10	10	10	10	5	60	50	60	50	60
	10	10	10	10	10	$\eta_c$ 10	50	60	60	60	60
	20	10	10	10	10	20	60	50	50	60	60
	50	10	10	10	10	50	70	60	70	60	60

(c) worst. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	10	10	10	10	2	20	20	20	20	20
	5	10	10	10	10	5	20	20	20	10	20
	10	10	10	10	10	$\eta_c$ 10	20	20	20	20	20
	20	10	10	10	10	20	20	20	20	20	20
	50	10	10	10	10	50	20	20	20	10	10

(d) S.D. %											
GA						GA-4S					
	$\eta_m$						$\eta_m$				
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50
$\eta_c$	2	0	0	0	0	2	9.47	10.1	11.5	11.9	10.3
	5	0	0	0	0	5	11.6	10.3	10.3	9.82	11.6
	10	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	10.5	10.3	8.62	10.6	11.5
	20	0	0	0	0	20	12.0	8.58	9.95	9.18	10.4
	50	0	0	0	0	50	12.2	9.26	10.3	11.8	10.2

表 5.34 : Shekel Function( $\delta = 6$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	10.3	9.50	10.5	8.50	8.75	2	17.8	15	15.3	15.5	15.3
	5	10.5	10	9.50	9.75	9.50	5	15.8	13.8	14.3	15.8	15.5
	10	10	9	11	9.50	8.25	$\eta_c$ 10	14.5	16	14.8	15.8	15.8
	20	10	10.3	9.50	8.25	9	20	15	14.5	15	15.3	14.0
	50	9	9	8.25	9	8.25	50	14.3	14.8	14.5	14.5	13.8
(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	2	37.5	25	25	25	25
	5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	5	37.5	25	25	25	25
	10	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	$\eta_c$ 10	25	37.5	25	25	37.5
	20	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	20	25	25	37.5	37.5	25
	50	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	50	25	37.5	25	25	25
(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
	5	0	0	0	0	0	5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
	10	0	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
	20	0	0	0	0	0	20	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
	50	0	0	0	0	0	50	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	4.85	5.39	4.63	5.89	5.79	2	7.18	5.05	5.23	5.39	5.23
	5	4.63	5.05	5.39	5.23	5.39	5	6.09	3.79	4.38	5.54	5.39
	10	5.05	5.67	4.10	5.39	5.98	$\eta_c$ 10	4.63	6.21	4.85	5.54	6.59
	20	5.05	4.85	5.39	5.98	5.67	20	5.05	4.63	5.65	5.81	4.10
	50	5.67	5.67	5.98	5.67	5.98	50	4.38	6.02	4.63	4.63	3.79



表 5.35 : Shekel Function( $\delta = 8$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	14.3	14	14.7	15	14.3	2	49.7	47.3	44.7	44.7	47.3
	5	16	13.7	15	13.7	14	5	48.7	44.3	43.7	41.7	45.7
	10	14.3	14.3	14.7	14.3	12.7	$\eta_c$ 10	44.7	42.3	42	46.7	45
	20	13.3	13.3	14.3	12.7	13	20	46.3	46	44.3	41	39.7
	50	13	12.3	13.7	14.3	13	50	44	43.3	43.7	42.3	42.7
(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	2	100	83.3	83.3	66.7	83.3
	5	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	5	83.3	83.3	83.3	66.7	66.7
	10	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	$\eta_c$ 10	83.3	66.7	66.7	83.3	83.3
	20	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	20	83.3	83.3	66.7	66.7	66.7
	50	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	50	83.3	83.3	66.7	66.7	66.7
(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	16.7	16.7	16.7	33.3	16.7
	5	0	0	0	0	0	5	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7
	10	0	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7
	20	0	0	0	0	0	20	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7
	50	0	0	0	0	0	50	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7
(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	5.84	6.17	5.47	5.05	5.84	2	15.2	14.8	14.1	10.3	13.2
	5	3.30	6.47	5.05	6.47	6.17	5	13.4	13.3	14.2	12.3	14.6
	10	5.84	5.84	5.47	5.84	7.19	$\eta_c$ 10	12.8	13.1	13.6	14.3	15.2
	20	6.73	6.73	5.84	7.19	6.97	20	15.2	15.3	12.4	12.7	15.4
	50	6.97	7.38	6.47	5.84	6.97	50	15.7	14.3	14.2	13.6	12.7

表 5.36 : Shekel Function( $\delta = 12$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	13.3	14.7	15	13.7	11.3	2	73.7	70	67.7	69.3	69.7
	5	12	12.7	14.7	13.3	13.3	5	73.7	68.3	66.3	69.7	68.7
	10	13	12.7	12.7	14.7	12	$\eta_c$ 10	70.7	70.7	65.3	67.7	63.3
	20	14.3	13.3	13.3	13.3	13.3	20	71.7	69.7	66.3	66	64.3
	50	13.3	14.7	13.3	13.3	13	50	71	67.7	65	67.7	65

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	2	100	100	83.3	83.3	100
	5	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	5	100	83.3	100	83.3	100
	10	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	$\eta_c$ 10	100	100	83.3	100	83.3
	20	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	20	100	100	83.3	83.3	83.3
	50	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	50	83.3	100	83.3	83.3	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	50	50	50	50	50
	5	0	0	0	0	0	5	50	50	50	50	50
	10	0	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	50	50	50	50	50
	20	0	0	0	0	0	20	50	50	50	50	50
	50	0	0	0	0	0	50	50	50	50	50	50

(d) S.D. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	6.73	5.47	5.05	6.47	7.85	2	12.2	12.6	10.3	11.3	13.8
	5	7.56	7.19	5.47	6.73	6.73	5	12.6	10.2	12.4	10.5	11.0
	10	6.97	7.19	7.19	5.47	7.56	$\eta_c$ 10	13.3	10.9	10.6	12.3	10.6
	20	5.84	6.73	6.73	6.73	6.73	20	10.8	11.0	11.9	12.1	12.1
	50	6.73	5.47	6.73	6.73	6.97	50	8.79	13.2	10.8	12.3	12.3

表 5.37 : Shekel Function( $\delta = 6$ ,  $\varepsilon = 1.2$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	22	22.7	20.7	18.7	14	2	49.3	49.3	47.3	49.3	45.3
	5	22.7	21.3	16	18.7	16	5	56	46	52.7	48.7	42
	10	19.3	20.7	17.3	20.7	17.3	$\eta_c$ 10	50.7	46	46.7	48.7	45.3
	20	20.7	19.3	18.7	14.7	9.33	20	52.7	50.7	43.3	50	46
	50	19.3	20	20	18	16	50	51.3	48	46.7	48.7	44

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	2	100	100	100	100	100
	5	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	5	100	100	100	100	100
	10	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	$\eta_c$ 10	100	100	100	100	100
	20	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	20	100	100	66.7	100	100
	50	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	5	0	0	0	0	0	5	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	10	0	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	20	0	0	0	0	0	20	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	50	0	0	0	0	0	50	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3

(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	16.0	15.7	16.3	16.7	16.6	2	22.6	21.5	19.2	21.5	17.5
	5	15.7	16.2	16.8	16.7	16.8	5	23.8	17.7	23.4	19.3	17.6
	10	16.6	16.3	16.8	16.3	16.8	$\eta_c$ 10	20.5	20.1	19.0	20.4	18.8
	20	16.3	16.6	16.7	16.7	15.1	20	22.4	20.5	15.4	19.3	20.1
	50	16.6	16.5	16.5	16.8	16.8	50	20.4	21.5	19.0	23.5	17.1

表 5.38 : Shekel Function( $\delta = 8$ ,  $\varepsilon = 1.2$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	23.3	22	22	19.3	16	2	70.7	64	58.7	58	59.3
	5	22.7	21.3	16	18.7	11.3	5	69.3	58	56.7	54.7	53.3
	10	21.3	17.3	17.3	16	15.3	$\eta_c$ 10	70.3	60	52.7	58.7	54
	20	19.3	21.3	18	16.7	9.33	20	60.7	60.7	58.7	57.3	56.7
	50	17.3	22.7	18	13.3	13.3	50	66.7	60	56.7	60.7	52

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	2	100	100	100	100	100
	5	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	5	100	100	100	100	100
	10	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	$\eta_c$ 10	100	100	100	100	100
	20	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	20	100	100	100	100	100
	50	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	5	0	0	0	0	0	5	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	10	0	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	20	0	0	0	0	0	20	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3
	50	0	0	0	0	0	50	33.3	33.3	33.3	33.3	33.3

(d) S.D. . %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	15.4	16.0	16.0	16.6	16.8	2	24.9	21.1	18.5	20.0	19.4
	5	15.7	16.2	16.8	16.7	16.0	5	24.1	23.1	21.6	22.1	22.3
	10	16.2	16.8	16.8	16.8	16.8	$\eta_c$ 10	23.9	23.3	20.3	18.5	23.2
	20	16.6	16.2	16.8	16.8	15.1	20	19.9	23.0	23.9	21.3	21.6
	50	16.8	15.7	16.8	16.5	16.5	50	25.2	21.3	23.6	22.0	19.2

表 5.39 : Shekel Function( $\delta = 12$ ,  $\varepsilon = 1.2$ ) における GA および GA-4S の優良解集合獲得率

(a) mean. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	11.6	13.2	14	10.4	12	2	82.0	76.4	78.8	78.4	70.8
	5	12.4	12.4	9.20	10.8	9.60	5	80.8	80	74.8	77.2	68.8
	10	12.8	12	11.2	10	7.60	$\eta_c$ 10	79.2	73.6	70.4	72	68.8
	20	11.6	12.8	10.8	10	5.60	20	80.8	78.4	73.2	66.4	56.4
	50	13.2	11.6	11.2	10.8	6.80	50	80.8	73.2	67.6	70	60.8

(b) best. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	20	20	20	20	20	2	100	100	100	100	100
	5	20	20	20	20	20	5	100	100	100	100	100
	10	20	20	20	20	20	$\eta_c$ 10	100	100	100	100	100
	20	20	20	20	20	20	20	100	100	100	100	100
	50	20	20	20	20	20	50	100	100	100	100	100

(c) worst. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	0	0	0	0	0	2	40	40	40	60	20
	5	0	0	0	0	0	5	40	60	40	20	40
	10	0	0	0	0	0	$\eta_c$ 10	40	40	40	40	20
	20	0	0	0	0	0	20	40	40	40	20	20
	50	0	0	0	0	0	50	60	40	40	20	20

(d) S.D. %												
GA						GA-4S						
	$\eta_m$						$\eta_m$					
	2	5	10	20	50		2	5	10	20	50	
$\eta_c$	2	9.97	9.57	9.26	10.1	9.90	2	15.8	17.5	17.8	14.5	17.2
	5	9.81	9.81	10.1	10.1	10.1	5	16.1	13.4	15.0	18.5	14.1
	10	9.70	9.90	10.0	10.1	9.81	$\eta_c$ 10	16.6	16.4	18.2	15.1	20.7
	20	9.97	9.70	10.1	10.1	9.07	20	16.1	16.6	17.0	18.3	19.2
	50	9.57	9.97	10.0	10.1	9.57	50	16.1	16.0	16.6	16.8	22.5

### 5.3.3 考察

DE への適用に関する Function 1 ベースの優良解集合探索問題 2 つの実験結果（表 5.7, 表 5.10）を除けば、すべての優良解集合探索問題において提案手法が優れた結果を残しているといえる。ここで改めて、2 つの実験結果（表 5.7, 表 5.10）の優良解がどのようなになっているかを確認されたい。どちらの問題も、優良解を 1 つ求める問題であり、それはすなわち、大域的最適解のみを求める問題ということになる。この場合、大域的最適解を求めるための手法である従来の DE のほうが優れていても何らおかしくなく、むしろ提案手法が肉薄した結果を残したことが、優れた有用性であるといえよう。

また、従来手法 (DE, GA) は、提案手法に対し、相対的に優良解集合獲得率の標準偏差が小さい傾向にある。従来手法は、大域的最適解のみを獲得する傾向があるのに対し、提案手法は、優良解集合のすべての獲得を目指すため、相対的な局所解ごとの探索効率が落ち、優良解集合の獲得率にばらつきが出たのだと考えられる。

いずれにしても、提案手法の結果は良好であり、理論的に優良解集合の探索が可能であるというだけに留まらず、数値実験的にも高い有用性を示したといえる。

# 6

## 結論

### 6.1 本論文の成果

本論文の成果をまとめる。本論文の成果は、主に3つある。①初めての優良解集合探索問題における優越関係の定義、②初めての厳密な優良解集合探索手法の提案、③提案した優越関係および優良解集合探索手法の有用性の数値実験的検証の3つである。それぞれについて簡単に述べる。

#### 6.1.1 初めての優良解集合探索問題における優越関係の定義

先行研究では、優良解集合探索問題のための、単目的最適化手法の開発がなされていたが、厳密な優良解集合探索手法は未だに提案されていなかった。それに対し、本論文では、優良解集合探索問題の定義を陽に取り込んだ優越関係を定義した。これにより、従来の有用な単目的最適化手法を、大きな変更を要することなく、評価の部分にこの優越関係を組み込むことで、優良解集合探索手法の構築を可能にした。優良解集合探索手法開発の土台を構築した。

### 6.1.2 初めての厳密な優良解集合探索手法の提案

従来の有力な単目的最適化手法に，提案した優越関係を適用した，初めての厳密な優良解集合探索手法を提案した。これにより，今までに提案されていなかった優良解集合探索手法という新規性を主張できる。また，導入に関しても，解の選択の部分にのみ変更を加える形にとどめ，利便性，有用性にも考慮している。優越関係の定義に留まらず，実際に手法に適用することで，今後の優良解集合探索手法開発の土台を，より盤石なものにした。

### 6.1.3 提案した優越関係および優良解集合探索手法の有用性の数値実験的検証

理論的に優良解集合探索問題が解けることができる手法の構築に留まらず，それらと導入前の従来手法との性能比較実験を行い，提案手法の高い有用性を示した。これにより，提案した優越関係が，理論的だけでなく，実験的にも高い実用性，有用性が示された。

## 6.2 課題と展望

今後の課題および展望としては，その他の進化型単目的最適化手法への適用，さらなるベンチマーク問題の拡充といった，比較的難易度の低い課題から，進化型の枠組みにとられないその他手法への優越関係の適用，解同士の優越関係の利活用といった，発展的な展望も期待できる。



# 7

## 謝辞

本論文は，首都大学東京大学院 理工学研究科 博士前期過程において，首都大学東京大学院 理工学研究科 電気電子工学専攻 安田恵一郎 教授のご指導の下で著者が行った新たな最適化問題および最適化手法の構築に関する研究成果である。

本研究の遂行・本論文の作成にあたり，日頃から多大なご指導を頂いている安田恵一郎先生をはじめ，助教授の田村先生，土屋先生，システム制御工学研究室の皆様には，多くの御指導，御助言を頂きました。心より御礼申し上げます。

# 参考文献

## 参考文献

- [1] K. Yasuda: “The Present and The Future of Metaheuristics,” *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol.47, No.6, pp.453-458 (2008) (in Japanese)  
安田恵一郎：「メタヒューリスティクスの現在と未来」，計測自動制御学会 計測と制御，Vol.47，pp.453-458（2008）
- [2] C. A. C. Coello, G. B. Lamont, and D. A. Van Veldhuizen: *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems* 2nd ed., Springer (2007)
- [3] 和田大典・本間俊雄：「自由曲面シェル構造の形態決定における優良解探索と解の多様性」，日本建築学会 構造工学論文集，Vol.28B，pp.453-460 (2012)
- [4] R. Oosumi, K. Tamura, and K. Yasuda: “Nobel Single-objective Optimization Problem and Firefly Algorithm-based Optimization Method,” 2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, pp.1011–1015 (2016-10)
- [5] R. Oosumi, W. Kumagai, K. Tamura, and K. Yasuda: “A Superior Solution Set Search Problem for Single-Objective Optimization and A Firefly Algorithm,” *IEEJ Trans.EIS*, Vol.136, No.10, pp.1947–1948 (2016-10) (in Japanese) 大隅竜太・熊谷渉・田村健一・安田恵一郎：「単一目的最適化における優良解集合探索問題と Firefly Algorithm に基づく解法」，電学論 C，Vol.136，No.10，pp.1497–1498（2016-10）
- [6] R. Oosumi, W. Kumagai, K. Tamura, J. Tsuchiya, and K. Yasuda: “Proposal Superior

- Solution Set Search Problem and Firefly Algrithm-based Optimization Method,” Symposium on Evolutionary Computation 2016, P1-03, pp.12–20 (2016-12)(in Japanese)  
大隅竜太・熊谷渉・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎：「優良解集合探索問題の提案と Firefly Algrithm に基づく最適化手法の提案」，進化計算シンポジウム 2016, P1-03, pp.12–20 (2016-12)
- [7] W.Hongran, K.Tamura, J.Tsuchiya, and K.Yasuda: “Firefly algorithm using cluster information for superior solution set search,” 2017 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybemetics, pp.3695–3699 (2017-10)
- [8] 土屋淳一・鈴木隆之・安田恵一郎：「サーフェスモータの最適設計への統合的最適化の適用」，電気学会 電子・情報・システム部門誌, Vol.130, No.1, pp.108-109 (2010)
- [9] A. Takezawa, S. Nishiwaki, and M. Kitamura: “Shape and Topology Optimization Based on the Phase Field Method and Sensitivity Analysis,” Journal of Computational Physics, Vol.229, No.7, pp.2697-2718 (2010)
- [10] 森川克己・中村信人：「ジョブショップの生産計画とスケジューリングに対する最適化アプローチ」，日本経営工学会論文誌, Vol.51, No.3, pp.168-176 (2000)
- [11] 藤田薫・江本源一・竹下聡彦・佐中俊哉：「化学産業における最適化技術の適用」，オペレーションズ・リサーチ：経営の科学, Vol.48, No.8, pp.549-554 (2003)
- [12] 黒田充・村松健児 編：「生産スケジューリング」，朝倉書店 (2002)
- [13] 加藤政一：「電力システム運用における最適化技術」，電気学会 電力・エネルギー部門誌, Vol.121, No.2, pp.160-163 (2001)
- [14] 森啓之：「電力系統におけるメタヒューリスティクス応用の動向」，電気学会 電力・エネルギー部門誌, Vol.123, No.10, pp.1120-1123 (2003)
- [15] 福山良和：「メタヒューリスティック手法の電力・エネルギー分野への適用例」，電気学会 電力・エネルギー部門誌, Vol.124, No.5, pp.679-682 (2004)
- [16] 得居誠也：「最適化から見たディープラーニングの考え方」，オペレーションズ・リ

- サーチ：経営の科学，Vol.60，No.4，pp.191-197（2015）
- [17] H. Konno and H. Yamazaki: “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market,” *Management Science*, Vol.37, No.5, pp.519-531 (1991)
- [18] 若井亮介・新里隆・嶋崎善章：「ランダム行列を用いたポートフォリオ最適化解析」，日本経営工学会論文誌，Vol.65，No.1，pp.17-28（2014）
- [19] G. Dantzig: “Linear Programming and Extensions,” Princeton University Press (1998)
- [20] 田中謙輔 著：「凸解析と最適化理論」，牧野書店（1994）
- [21] 今野浩・山下浩 編著：「非線形計画法」，日科技連（1978）
- [22] 志水清孝・相吉英太郎 共著：「数理計画法」，昭晃堂（1984）
- [23] 坂和正敏 著：「非線形システムの最適化＜一目的から多目的へ＞」，森北出版（1986）
- [24] 今野浩 著：「数理決定法入門 キャンパスのOR」，朝倉書店（1992）
- [25] 福島雅夫 著：「非線形最適化の基礎」，朝倉書店（2001）
- [26] 玉置久 編著：「システム最適化」，オーム社（2005）
- [27] 矢部博 著：「工学基礎 最適化とその応用」，数理工学社（2006）
- [28] 藤澤克樹・梅谷俊治 著：「応用に役立つ 50 の最適化問題」，朝倉書店（2009）
- [29] 相吉英太郎・安田恵一郎 編著：「メタヒューリスティクスと応用」，電気学会，オーム社（2007）
- [30] 安田恵一郎：「メタヒューリスティクスの現在と未来」，計測と制御，Vol.47，No.6，pp.453-458（2008）
- [31] 安田恵一郎：「進化論的計算手法とメタヒューリスティクス」，電気学会 電子・情報・システム部門誌，Vol.122，No.3，pp.320-323（2002）

- [32] I. Boussaïd, J. Lepagnot, and P. Siarry: “A Survey on Optimization Metaheuristics,” *Information Sciences*, Vol.237, pp.82-117, Elsevier Publisher (2013)
- [33] 柳浦睦憲・茨木俊秀 著:「組合せ最適化—メタ戦略を中心として—」, 朝倉書店 (2001)
- [34] X. S. Yang: “Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms,” Second Edition, Luniver Press (2010)
- [35] J. Kennedy and R. Eberhart, “Particle Swarm Optimization,” *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Vol.4, pp.1942-1948 (1995)
- [36] R. M. Storn and K. V. Price: “Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Space,” *Journal of Global Optimization*, Vol.11, No.4, pp.341-359 (1997)
- [37] D. Karaboga: “An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimization,” Technical Report TR06, Computer Engineering Department, Engineering Faculty, Er-ciyes University (2005)
- [38] X. S. Yang: “Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms,” Luniver Press (2008)
- [39] X. S. Yang: “Firefly Algorithms for Multimodal Optimization,” *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications, Lecture Notes in Computer Sciences*, Vol.5792, pp.169-178 (2009)
- [40] X. S. Yang and S. Deb: “Cuckoo Search via Lévy Flights,” *Proceedings of World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing 2009*, pp.210-214 (2009)
- [41] 中山弘隆・谷野哲三:「多目的計画法の理論と応用」, コロナ社 (1994)
- [42] Q. Zhang and H. Li: “MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition”, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol.11, No.6, pp.712-731 (2007-12)
- [43] E. Zitzler and S. Künzli: “Indicator-Based Selection in Multiobjective Search”, *Proc.*

- of the 8th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, Lecture Notes in Computer Science, Vol.3242, pp.832-842 (2004-9)
- [44] E. Zitzler and L. Thiele: "Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol.3, No.4, pp.257-271 (1999-11)
- [45] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan: "A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II", *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol.6, No.2, pp.182-197 (2002-4)
- [46] 稲垣潤・長谷山美紀・北島秀夫:「GA 経路探索における複数解候補の決定に関する考察」, 電子情報通信学会 技術研究報告, Vol.82, pp.1102-1111 (1999)
- [47] 藤井聡・北條成人・吉成勇介:「生産計画・物流計画への最適化技術の応用」, JFE スチール株式会社 技術論文誌, No.14, pp.49-54 (2006)
- [48] L. Teng, T. Isumi, X. Lu, and F. Wakui: "A Method of the Optimum Route Search by Fuzzy-AHP," *IEEJ Trans. EIS*, Vol.133, No.6, pp.1269-1276 (2013) (in Japanese)  
藤琳・泉隆・魯曉鋒・涌井文雄:「ファジィ AHP を応用した最適経路探索」, 電気学会 電子・情報・システム部門誌, Vol.133, No.6, pp.1269-1276 (2013)
- [49] J. Kennedy and R. Eberhart: "Particle Swarm Optimization," *Proc. IEEE International Conf. on Neural Networks*, Vol.4, pp.1942-1948 (1995)
- [50] X. S. Yang: "Firefly Algorithms for Multimodal Optimization," *Proc. 5th Symposium on Stochastic Algorithms, Foundations and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.5792, pp.169-178 (2009)
- [51] X. S. Yang: "Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms," 2nd Edition, Luniver Press, pp.81-96 (2010)
- [52] X. S. Yang and Xingshi He: "Firefly Algorithms: Recent Advances and Applications," *Int. J. Swarm Intelligence*, Vol. 1, No.1, pp.36-50 (2013)

- [53] R. Storn and K. Price: “Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces”, *Journal of Global Optimization*, Vol. 11, No.4, pp.341-359 (1997)
- [54] D. E. Goldberg: “Genetic Algorithm in Search, Optimization, and Machine Learning,” Addison-Wesley (1989)
- [55] Xiaodong Li, Andries Engelbrecht, and Michael G. Epitropakis: “Benchmark Functions for CEC’ 2013 Special Session and Competition on Niching Methods for Multi-modal Function Optimization,” RMIT University, Evolutionary Computation and Machine Learning Group, Australia, Tech. Rep (2013)
- [56] G. Singh and K. Deb: “Comparison of Multi-Modal Optimization Algorithms Based on Evolutionary Algorithms,” *Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO ’06)*, pp.1305-1312 (2006-7)
- [57] E. Zitzler, M. Laumanns, and L. Thiele: “SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm,” Technical Report 103, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Department of Electrical Engineering, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich (2001)
- [58] R. Storn and K. Price: “Differential Evolution: A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces,” *Journal of Global Optimization*, Vol.11, pp.341–359 (1997)
- [59] K. Price, R. Storn, and J. Lampinen: “Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization,” Springer (2005)
- [60] K. Deb and R. B. Agrawal: “Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space,” *Complex Systems*, Vol.9, No.2, pp.115–148 (1995)

## 著者の研究業績

### 学術論文（論文審査有り）

- [61] Ryu Fukushima, Hongran Wang, Kenichi Tamura, Junichi Tsuchiya, and Keiichiro Yasuda: "Dominance Relation Based Genetic Algorithm for Superior Solution Set Search Problem," IEEJ Trans. on Electrical and Electronic Engineering 【掲載決定】

### 国際会議（論文審査有り）

- [62] Ryu Fukushima, Kenichi Tamura, Junichi Tsuchiya, and Keiichiro Yasuda: "Fitness-Based Search Method for Superior Solution Set Search Problem," Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, pp.753-758 (2018)
- [63] Ryu Fukushima, Kenichi Tamura, Junichi Tsuchiya, and Keiichiro Yasuda: "A Genetic Algorithm for Superior Solution Set Search Problem," Soft Computing and Pattern Recognition SoCPaR - IAS 2018, Parallel Session SoCPaR 02 - Pattern recognition in social networks 1, 24 (2018)

### 学会発表（論文審査無し）

- [64] 福島 竜・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎：「優良解集合探索問題のための逐次近似最適化に基づく探索手法」，平成 29 年電気学会電子・情報・システム部門大会，GS2-1， pp.1226-1231 (2017)
- [65] 福島 竜・田村健一・土屋淳一・安田恵一郎：「Cuckoo Search の探索ダイナミクスの解析と適応化に関する検討」，平成 30 年電気学会電子・情報・システム部門大会，MC1-6， pp.907-912 (2018)
- [66] Ryu Fukushima, Kenichi Tamura, Junichi Tsuchiya, and Keiichiro Yasuda: "Fitness-Based Superior Solution set Search Method," Proceedings of 2018 IEEJ Conference



---

on Electronics, Information, and Systems, SS3-2, pp.1635-1636 (2018)